تمارين: المجموعات $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و ID و $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$

تمرين 1

1- أحسب $A=-\frac{2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ $\quad B=\dfrac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$ و $C=\dfrac{\frac{1}{101}}{\frac{10101}{10101}}\cdot$

$$C=\cfrac{\cfrac{\cfrac{1}{101}}{10101}}{\cfrac{10101}{\cfrac{101}{1}}}$$

2- أعط الكتابة العلمية للأعداد التالية : 158 ، 174 ;8 ، 0,0478 ، 0,0000032

3- لتكن a و b و c أعداد حقيقية

أ- بسط $-2(a+b-c)-3(a-b+c)+4(5a-b)$

ب- بين أن $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(b-a)(a-c)(c-b)$

ت- بين أن $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$ حيث a و b و c مختلفة مثنى مثنى

تمرين2

1- أحسب $\sqrt{5^2\times3^3}+\sqrt{75}-11\sqrt{3}+2\sqrt{243}$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

2- أ- أحسب $\left(1+\sqrt{5}\right)^2$ و $\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ ثم بسط $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ و $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

ب- بسط $\sqrt{21-6\sqrt{6}}$; $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ ، $\sqrt{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}$

3- اجعل المقام عددا جذريا للعددين الحقيقيين $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{2-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

4- بين أن $\sqrt{7+\sqrt{48}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=4$ و أن $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}=-4$

5-أحسب $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2$. ماذا تلاحظ؟

بين الحالة العامة مع $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ et $\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ حيث a عدد جدري غير منعدم.

تمرين 3

1- بسط أكثر ما يمكن الأعداد التالية $3^3\times15^{-5}\times21^2\times\left(5^4\right)^{-1}$ و $\sqrt{27}^3\times\sqrt{3}^{-4}\times\sqrt{2}^3\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$

2- أحسب $\dfrac{450\ \ 000\times(0,000\ \ 002)^2}{0,000\ \ 3}$

3- ليكن x عددا حقيقيا

أ- أنشر و اختصر $(x+2)(x-2)-x^2$

ب- أحسب دون استعمال المحسبة العدد $564111232\times564111228-564111230^2$

تمرين4

1- عمل $(x+2)^2+x^2-4$ ، $(2x-1)^2-(3x+2)^2$

$27x^3-8$; $x^3+125-5x(x+5)$

2- نضع $a+b=1$; $a^2+b^2=2$

أحسب a^4+b^4 ; a^6+b^6

تمرين 5

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا نضع $p=n(n+3)$

1- أكتب $(n+1)(n+2)$ بدلالة p

2- أكتب $n(n+1)(n+2)(n+3)$ بدلالة p

3- استنتج أن $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ مربع كامل

4- تطبيق: $2002\times 2003\times 2004\times 2005+1$ مربع كامل لأي عدد

تمرين6

ليكن $a\in\mathbb{R}^*$ نضع $x=a+\frac{1}{a}$

أحسب $a^2+\frac{1}{a^2}$; $a^3+\frac{1}{a^3}$ بدلالة x

تمرين7

لتكن a و b و c و d و m و n أعداد حقيقية غير منعدمة حيث $mc+nd\neq 0$

1- بين إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ma+nb}{mc+nd}$

2- حدد x و y حيث $\frac{3}{x}=\frac{4}{y}$ و $2x-3y=2$

تمرين8

ليكن x و y من $\mathbb{R}$ حيث $x\neq y$ و $2(x^2+y^2)=5xy$

أحسب $\frac{x+y}{x-y}$

تمرين9

ليكن a و b و c من $\mathbb{R}^*$ حيث $ab+bc+ca=0$

أحسب $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

تمارين : الحسابيات مستوى جذع مشترك علوم	إنجاز الاستاذ : محسن الشرفي

تمرين رقم 1 :

1) بين أن العدد 26820 قابل للقسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9 .

2) حدد قيمة n لكي يكون العدد $n15n$ مضاعفا للأعداد 2 و 4 و 3 و 9 بحيث $0 \le n \le 9$.

3) بين أن العدد $36\times5\times7+27$ مضاعف للعدد 9 .

4) بين أن العدد $2\times9\times7+3$ عدد فردي .

الحل :

1) ** رقم وحدات العدد 26820 هو 0 إذن العدد 26820 قابل للقسمة على 2 و 5 .

** مجموع أرقام العدد 26820 هو $2+6+8+2+0=18$ من مضاعفات العددين 3 و 9 إذن العدد 26820 قابل للقسمة على 3 و 9 .

** رقمي الوحدات و العشرات للعدد 26820 يكونان العدد 20 من مضاعفات 4 إذن العدد 26820 قابل للقسمة على 4 .

ومنه العدد 26820 قابل للقسمة على 2 و 3 و 4 و 5 و 9 .

2) ** لكي يكون العدد $n15n$ من مضاعفات العدد 2 يكفي أن يكون n عدد زوجي محصور بين 0 و 9 بمعنى قيم n هي 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8

** لكي يكون العدد $n15n$ من مضاعفات العدد 4 يكفي أن يكون العدد $5n$ من مضاعفات 4 و بما أن مضاعفات العدد 4 المحصورة بين 50 و 59 هي 52 و 56 فإن قيمة n هي 2 أو 6 .

إذن $n=2$ أو $n=6$.

** لكي يكون العدد $n15n$ من مضاعفات العدد 3 و 9 يكفي أن يكون العدد $n+1+5+n=2n+6$ من مضاعفات العدد 9 .

إذا كان $n=2$ فإن $n+1+5+n=2n+6=2\times2+6=10$ ليست من مضاعفات 9 .

إذا كان $n=6$ فإن $n+1+5+n=2n+6=2\times6+6=12+6=18$ من مضاعفات 3 و 9 .

ومنه قيمة العدد n هي 6 .

3) العدد n يكون مضاعفا للعدد 9 إذا كان يوجد عدد صحيح k بحيث $n=9k$ (تذكير)

لدينا :

$$
\begin{aligned}
42\times5\times7\times12+27 &= 3\times14\times5\times7\times3\times4+9\times3\\
&= 3\times3\times14\times5\times7\times4+9\times3\\
&= 9\times14\times5\times7\times4+9\times3\\
&= 9\times(14\times5\times7\times4+3)
\end{aligned}
$$

ومنه يوجد k بحيث $k=(14\times5\times7\times4+3)$ و $n=9k$ ومنه n مضاعفا للعدد 9 .

4) لكي يكون العدد n فرديا يكفي أن يوجد عدد صحيح k بحيث $n=2k+1$. (تذكير)

لدينا : $2\times9\times7+3=2\times(9\times7)+2\times1+1=2[(9\times7)+1]+1$

ومنه يوجد عدد صحيح k بحيث $k=[(9\times7)+1]$ و $n=2k+1$ و بالتالي n عدد فردي .

تمرين رقم 2 :

نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين $a=2646$ و $b=2100$.

1) فكك العددين a و b إلى جداء عوامل أولية .

2) بسط $\frac{a}{b}$.

3) بسط $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$.

4) فكك العدد $c=a^3b^2$ إلى جداء عوامل أولية .

الحل :

1)*** تفكيك العدد $a=2646$.

2646	**2**
1323	**3**
441	**3**
147	**3**
49	**7**
7	**7**
1	

ومنه $2664=2\times3\times3\times3\times7\times7=2\times3^3\times7^2$.

***تفكيك العدد $b=2100$

2100	2
1050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

ومنه $2100=2\times2\times3\times5\times5\times7=2^2\times3\times7$

2) لنبسط $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b}=\frac{2664}{2100}=\frac{2\times3\times3\times3\times7\times7}{2\times2\times3\times5\times5\times7}=\frac{3\times3\times7}{2\times5\times5}=\frac{63}{50}$$

3) لنبسط $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$.

** $\sqrt{a}=\sqrt{2664}=\sqrt{2\times3^3\times7^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3^3}\times\sqrt{7^2}=\sqrt{2}\times3\sqrt{3}\times7=21\sqrt{6}$

** $\sqrt{b}=\sqrt{2100}=\sqrt{2^2\times3\times7}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}=2\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

4) لدينا : $c=a^3b^2=\left(2\times3^3\times7^2\right)^3\times\left(2^2\times3\times7\right)^2=2^3\times3^9\times7^6\times2^4\times3^2\times7^2$

$=2^3\times2^4\times3^9\times3^2\times7^2\times7^6=2^7\times3^{11}\times7^8$

تمرين رقم 3 :

نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين $a=1400$ و $b=1540$.

1) فكك العددين a و b إلى جداء عوامل أولية .

2) أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

3) أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

الحل :

1) فكك العددين $a=1400$ و $b=1540$ إلى جداء عوامل أولية .

1400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	7
1	

1540	2
770	2
385	5
77	7
11	11
1	

ومنه : $a=1400=2\times2\times2\times5\times5\times7=2^3\times5^2\times7$

و $b=1540=2\times2\times5\times7\times11=2^2\times5\times7\times11$

2) القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة مرفوعة إلى أصغر أس .

بما أن : $a=2^3\times5^2\times7$ و $b=2^2\times5^1\times7\times11$ فإن $PGCD(a,b)=2^2\times5^1\times7=140$.

3) المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو جداء العوامل الأولية الغير مشتركة و المشتركة مرفوعة إلى أكبر أس .

بما ان $a=2^3\times5^2\times7$ و $b=2^2\times5^1\times7\times11$ فإن $PPCM(a,b)=2^3\times5^2\times7\times11=15400$.

تمرين رقم 4 :

1) بين أن العدد $A=5^{n+2}-5^n$ من مضاعفات العدد 3 لكل n عدد صحيح طبيعي .

2) فكك العدد $B=10^3\times35$ إلى جداء عوامل أولية .

3) حدد قيمة العدد الصحيح الطبيعي n بحيث يكون $n+4$ قاسما للعدد $n+17$.

الحل :

1) ليكن n عدد صحيح طبيعي .

$$A=5^{n+2}-5^n=5^n\left(5^2-1\right)=5^n\left(25-1\right)=5^n\times24=24\times5^n=3\times\left(8\times5^n\right)$$

ومنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث $A=3k$

و بالتالي : العدد A من مضاعفات العدد 3 .

2) لدينا : $B=10^3\times35=(2\times5)^3\times5\times7=2^3\times5^3\times5\times7=2^3\times5^4\times7$.

3) لدينا : $n+17=(n+4)+13$ ومنه فإن $n+4$ قاسما للعدد $n+17$ يعني $n+4$ قاسما للعدد 13 .

ونعلم أن قواسم العدد 13 هما : 1 و 13 ومنه فإن $n+4=1$ أو $n+4=13$.

المعادلة $n+4=1$ ليس لها حل لأن n عدد صحيح طبيعي .

المعادلة $n+4=13$ لها حل واحد هو 9 ومنه قيمة العدد n لكي يكون $n+4$ قاسما للعدد $n+17$ هو $n=9$.

تمرين رقم 5 :

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث $a>2b$.

1) بين أن العددين $a-2b$ و $a+2b$ لهما نفس الزوجية .

2) حل في $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ المعادلة $a^2-4b^2=36$.

الحل :

1) لدينا : $(a+2b)+(a-2b)=a+2b+a-2b=2a$ ومنه فإن المجموع $(a+2b)+(a-2b)$ عدد زوجي .

و بالتالي فإن العددين $(a+2b)$ و $(a-2b)$ زوجيين أو فرديين إذن العددين $a-2b$ و $a+2b$ لهما نفس الزوجية .

2) لدينا : $a^2-4b^2=36$ يعني $(a+2b)(a-2b)=36$.

إذن $(a+2b)$ و $(a-2b)$ قاسمان للعدد 36 و نعلم أن قواسم العدد 36 هي : 1 و 2 و 3 و 4 و 6 و 9 و 12 و 18 و 36 .

و حسب السؤال 1 لدينا العددين $a-2b$ و $a+2b$ لهما نفس الزوجية ومنه فإن $\begin{cases}a+2b=18\\a-2b=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}a+2b=6\\a-2b=6\end{cases}$ ($a+2b\geq a-2b$)

** لنحل النظمة التالية $\begin{cases}a+2b=18\\a-2b=2\end{cases}$

بطريقة التأليفية الخطية لدينا : $\begin{cases}a+2b=18\\a+2b+a-2b=18+2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a+2b=18\\2a=20\end{cases}$ و بالتالي $\begin{cases}a+2b=18\\a=10\end{cases}$ و بتعويض $a=10$ نحصل على $2b=8$ ومنه $b=4$. إذن حل النظمة هو الزوج $(10,4)$

** لنحل النظمة التالية $\begin{cases}a+2b=6\\a-2b=6\end{cases}$ بنفس الطريقة نحصل على الحل $(6,0)$.

أخيرا المعادلة $a^2-4b^2=36$ تقبل حلين في $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ هما $(10,4)$ و $(6,0)$.

تمرين رقم 6 :

1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

بين أن n^2+n عدد زوجي .

2) بين أن العدد n^2+5n+3 عدد فردي

3) بين أن العدد n^4-n^2 مضاعف للعدد 4 .

الحل :

1) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

لدينا : $n^2+n=n(n+1)$

الحالة 1 :

إذا كان n عددا زوجيا فإن $n+1$ عدد فردي ومنه الجداء $n(n+1)$ عدد زوجي .

الحالة 2 :

إذا كان n عددا فرديا فإن $n+1$ عدد زوجي ومنه الجداء $n(n+1)$ عدد زوجي .

و بالتالي فإن $n(n+1)$ عدد زوجي لكل n عدد صحيح طبيعي .

2) لدينا : $n^2+5n+3=(n^2+n)+4n+3$

الطريقة 1 :

نعلم أن n^2+n عدد زوجي و $4n$ عدد زوجي إذن $(n^2+n)+4n$ عدد زوجي و بما أن 3 عدد فردي فإن $(n^2+n)+4n+3$ عدد فردي

ومنه فإن العدد n^2+5n+3 عدد فردي .

الطريقة 2 :

بما أن n^2+n عدد زوجي (حسب السؤال 1) فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث $n^2+n=2k$.

و العدد $4n$ عدد زوجي لأن $4n=2(2n)$.

و العدد 3 يكتب $3=2+1$.

إذن : $n^2+5n+3=(n^2+n)+4n+3=2k+2(2n)+2+1=2(k+2n+1)+1$

ومنه العدد n^2+5n+3 عدد فردي لأنه يوجد عدد k' بحيث $n^2+5n+3=2k'+1$.

3) يكون العدد a مضاعفا للعدد 4 إذا كان $a=4k$ بحيث k عدد صحيح طبيعي .

لدينا : $n^4-n^2=\left(n^2-n\right)\left(n^2+n\right)$

ونعلم حسب السؤال الأول أن العدد n^2+n عدد زوجي إذن يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث $n^2+n=2k$.

و بنفس الطريقة العدد n^2-n عدد زوجي إذن يوجد عدد صحيح طبيعي k' بحيث $n^2-n=2k'$.

إذن : $n^4-n^2=\left(n^2-n\right)\left(n^2+n\right)=2k\times 2k'=4kk'$ ومنه العدد n^4-n^2 من مضاعفات العدد 4 .