

المعادلات و المتراجحات من الدرجة الاولى والثانية بمجهول واحد

القدرات المنتظرة

- *- حل معادلات أو متراجحات تؤول في حلها إلى معادلات أو متراجحات من الدرجة 1 أو 2 بمجهول واحد.
- *- تربيض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات.

I تعاريف أنشطة

$$x \in \mathbb{N} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2} \quad K \quad x \in \mathbb{R} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2} \quad \text{حل المعادلتين التاليتين}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad 5x-7 \leq \frac{11}{2}x+4 \quad \text{حل المتراجحة}$$

تعريف 1

جميع حلول معادلة (أو متراجحة) تكون مجموعة تسمى مجموعة حلول المعادلة (أو المتراجحة) نرمر لها بـ S أو S' أو.....

تعريف 2

نقول ان معادلتين (أو متراجحين) متكافئتان إذا كانت للمعادلتين (أو للمتراجحتين) نفس مجموعة الحلول.

II (المعادلة التالفة

1- مفهوم معادلة تالفة

تعريف

كل معادلة يمكن كتابتها على شكل $ax+b=0$ $x \in \mathbb{R}$ تسمى معادلة تالفة. و تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

2- حل معادلة تالفة

$$x \in \mathbb{R} \quad ax+b=0 \quad \text{نحل المعادلة}$$

$$\text{إذا كان } a=b=0 \text{ فان } S=\mathbb{R}$$

$$\text{إذا كان } a=0 \text{ و } b \neq 0 \text{ فان } S=\emptyset$$

$$\text{إذا كان } a \neq 0 \text{ فان } ax+b=0 \text{ تكافئ } x=-\frac{b}{a} \text{ أي أن } S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

3- حل المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ $x \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$

$$(ax+b)(cx+d)=0 \text{ تكافئ } ax+b=0 \text{ أو } cx+d=0$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0$ $x \in \mathbb{R}$ هي اتحاد مجموعة حلول المعادلة

$$x \in \mathbb{R} \quad ax+b=0 \text{ و } x \in \mathbb{R} \quad cx+d=0$$

$$x \in \mathbb{R} \quad (2x+1)(-3x-5)=0 \quad \text{تمرين: حل المعادلة}$$

III (المتراجحات التالفة بمجهول واحد

1- تعريف

كل متراجحة يمكن كتابتها على شكل $ax+b < 0$ أو $ax+b \leq 0$ $x \in \mathbb{R}$ أو

$ax+b \geq 0$ أو $ax+b > 0$ $x \in \mathbb{R}$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ، تسمى متراجحة تالفة.

و تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

2- حل متراجحة تالفة بمجهول واحد

أ- إشارة الحدانية $ax+b$

*- إذا كان $a=0$ فان إشارة $ax+b$ هي إشارة b

*- إذا كان $a \neq 0$ فإن $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ و بالتالي إشارة $ax + b$ مرتبطة بإشارة a و $x + \frac{b}{a}$

$$x + \frac{b}{a} > 0 \quad \text{تكافئ} \quad x > -\frac{b}{a}$$

$$x + \frac{b}{a} < 0 \quad \text{تكافئ} \quad x < -\frac{b}{a}$$

نلخص هذه الدراسة في جدول يسمى جدول إشارة $ax + b$

| | | | |
|----------|---------------|----------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
| $ax + b$ | عكس إشارة a | 0 | إشارة a |

تمرين

حل المتراجحتين: $x \in \mathbb{R} \quad 2x + 3 < 0$; $x \in \mathbb{R} \quad -3x + 4 \leq 0$ بطريقتين مختلفتين.

3- حل المتراجحة $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) \leq 0$ أو من نوع $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) > 0$

حل هذا النوع من المتراجحات يعتمد على دراسة إشارة $(ax + b)(cx + d)$ بتوظيف إشارة كل من $(ax + b)$ و $(cx + d)$

تمرين

حل المتراجحتين: $x \in \mathbb{R} \quad (2x + 1)(-3x + 1) < 0$; $x \in \mathbb{R} \quad (-2x - 1)(-5x + 1) \geq 0$

IV) المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1- تعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية في \mathbb{R} كل معادلة على الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

2- أمثلة

حل في \mathbb{R} المعادلات

$$3x^2 - \sqrt{3}x = 0 \quad , \quad x^2 - 5 = 0 \quad , \quad 2x^2 + 1 = 0 \quad , \quad x^2 - 6x - 7 = 0 \quad , \quad x^2 - 2x + 3 = 0$$

3- صفة عامة

(a) نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $x \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$

لكل x من \mathbb{R}

$$\text{لدينا} \quad ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

$$\text{الكتابة} \quad a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \quad \text{يسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود} \quad ax^2 + bx + c$$

لنحل المعادلة

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

من خلال هذا يتبين أن حل المعادلة يتوقف على إشارة العدد $b^2 - 4ac$ الذي يسمى **مميز**

$$\text{المعادلة} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{نرمز له بـ} \quad \Delta \quad \text{نكتب} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

* إذا كان $\Delta < 0$ فإن $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ و بالتالي المعادلة لا تقبل حلا في \mathbb{R}

* إذا كان $\Delta = 0$ فإن $x + \frac{b}{2a} = 0$ أي $x = -\frac{b}{2a}$

* إذا كان $\Delta > 0$ فإن $ax^2 + bx + c = 0$ تكافئ $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

$$\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \text{ تكافئ}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ أو } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ تكافئ}$$

مبرهنة

نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و S مجموعة حلولها في \mathbb{R} .
العدد $b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة أو ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ نرسم له Δ

إذا كان $\Delta < 0$ فإن $S = \emptyset$

إذا كان $\Delta = 0$ فإن $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta > 0$ فإن $S = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

اصطلاح

إذا كان $\Delta = 0$ فإن $x = -\frac{b}{2a}$ في هذه الحالة نقول إن $-\frac{b}{2a}$ حل مزدوج للمعادلة

ملاحظة إذا كان a و c لهما إشارتين مختلفتين فإن للمعادلة حلين.

تمرين

حل في \mathbb{R} المعادلات

$$x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad 5x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0 \quad 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

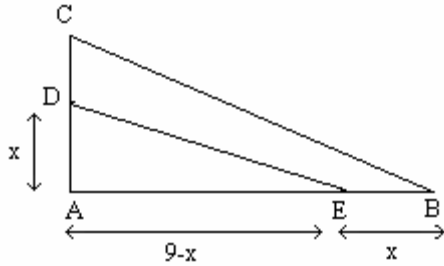
تمرين

نعتبر ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث $AB = 9$ و $AC = 4$ حدد موضع نقطتين D و E

تتبعان

على التوالي لـ $[AB]$ و $[AC]$ بحيث $AD = BE$ و مساحة ADE تساوي مساحة الرباعي $BCDE$

اختيار المجهول نضع $AD = BE = x$



مساحة ADE هي $\frac{x(9-x)}{2}$

مساحة الرباعي $BCDE$ هي $\frac{4 \times 9}{2} - \frac{x(9-x)}{2}$

لدينا $\frac{4 \times 9}{2} - \frac{x(9-x)}{2} = \frac{x(9-x)}{2}$

ومنه $18 - 9x + x^2 = 0$

(b) نتيجة

نعتبر معادلة من شكل $ax^2 + 2b'x + c = 0$ و $a \neq 0$

لدينا $\Delta = 4(b'^2 - ac)$ نضع $\Delta' = b'^2 - ac$

إشارة Δ هي إشارة Δ'

إذا كان $\Delta' < 0$ فإن $S = \emptyset$

إذا كان $\Delta' = 0$ فإن $S = \left\{-\frac{b'}{a}\right\}$

إذا كان $\Delta' > 0$ فإن $S = \left\{\frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$

العدد Δ' يسمى المميز المختصر للمعادلة

تمرين

$$x \in \mathbb{R} \quad 6x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0 \quad \text{حل}$$

4- نعمل ثلاثة الحدود

$$a \neq 0 \quad / \quad T(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{نعتبر ثلاثة الحدود}$$

ليكن Δ مميزها

* إذا كان $\Delta < 0$ فان $T(x)$ لا تقبل جدرا و بالتالي $T(x)$ لا يمكن تعميلها في \mathbb{R}

$$* \text{ إذا كان } \Delta = 0 \text{ فان } T(x) \text{ لها جذر وحيد } \frac{-b}{2a} \text{ وبالتالي } T(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

* إذا كان $\Delta > 0$ فان $T(x)$ لها خدرين مختلفين x_1 و x_2

$$\text{وبالتالي } T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

تمرين

$$Q(x) = x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{عمل} \quad P(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

5- معادلات تؤول في حلها الى معادلات من الدرجة الثانية

$$\text{مثال 1 حل } x \in \mathbb{R} \quad x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

$$\text{مثال 2 حل } x \in \mathbb{R} \quad 2x - 7\sqrt{x} - 4 = 0$$

$$\text{مثال 3 نعتبر } P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$$

$$\text{أحسب } P\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{حل المعادلة } P(x) = 0$$

6- مجموع و جداء جدرى ثلاثة الحدود

$$a \neq 0 \quad \text{نعتبر } x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{حيث}$$

لنفترض أن $\Delta > 0$ و أن جذريها هما x_1 و x_2

لدينا لكل x من \mathbb{R}

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

$$\text{إذن } x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

خاصة

إذا كان للمعادلة $x \in \mathbb{R} \quad ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ حلان x_1 و x_2 فانهما يحققان العلاقتين

$$x_1x_2 = \frac{c}{a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

تمرين

تأكد أن للمعادلة $4x^2 - 7x + 5 = 0$ جدران x_1 و x_2 ثم أحسب $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ دون حساب x_1 و x_2

VI- المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

1- اشارة ثلاثة الحدود من الدرجة الثانية

$$a \neq 0 \quad / \quad T(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{نعتبر ثلاثة الحدود}$$

ليكن Δ مميزها

$$\text{الشكل القانوني } T(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

إذا كان $\Delta < 0$ فان إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a

إذا كان $\Delta = 0$ فإن $ax^2 + bx + c$ يكون منعدما من أجل $x = \frac{-b}{2a}$ وإشارتها إشارة a لكل x من

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$$

إذا كان $\Delta < 0$ فإن $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ حيث x_1 و x_2 جذري $ax^2 + bx + c$

نفترض أن $x_1 < x_2$

| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ | |
|-----------|-----------|-------|---------------|-----------|-----------|
| $x - x_1$ | - | 0 | + | + | |
| $x - x_2$ | - | - | 0 | + | |
| $T(x)$ | إشارة a | 0 | عكس إشارة a | 0 | إشارة a |

خلاصة

إذا كان $\Delta < 0$ فإن إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a

إذا كان $\Delta = 0$ فإن إشارة $ax^2 + bx + c$ هي إشارة a لكل x من $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$

إذا كان $\Delta < 0$ فإن $x_1 < x_2$ حيث $ax^2 + bx + c$ جذري x_1 و x_2

| x | $-\infty$ | x_1 | x_2 | $+\infty$ | |
|--------|-----------|-------|---------------|-----------|-----------|
| $T(x)$ | إشارة a | 0 | عكس إشارة a | 0 | إشارة a |

2- المتراجحات

أ- حل في \mathbb{R} المتراجحات

$$3x^2 - 2x - 8 < 0 \quad -2x^2 + 5x - 3 \leq 0$$

$$4x^2 - 2x + 1 > 0 \quad -3x^2 + \sqrt{3}x - 1 \geq 0$$

ب- متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الثانية

مثال 1

حل في \mathbb{R} المتراجحتين

$$2x^4 - 9x^2 + 4 > 0$$

$$\frac{x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}}{x^2 - x - 2} \geq 0$$

مثال 2

$$p(x) = 6x^3 - 13x^2 + 4 \quad \text{نعتبر}$$

1- تأكد أن 2 جذر للحدودية $p(x)$

2- حل في \mathbb{R} $p(x) \leq 0$

3- حل في \mathbb{R} $p(x) \leq 3x^2(x - 2)$

تمرين

$$p(x) = -x^3 + (3+a)x^2 - (2+3a)x + 2a \quad \text{نعتبر}$$

1- بين أن a جذر للحدودية $p(x)$

2- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $p(x) = (x - a)Q(x)$

3- أدرس إشارة $-x^2 + 3x - 2$

4- ب- حل في \mathbb{R} $p(x) > 0$ حيث $Q(a) > 0$