النظمـــــات

*- حل نظمات من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال مختلف الطرق (التأليفة الخطية، التعويض، المحددة).
*- التمثيل المبياني لحلول متراجحات أو نظمات متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين، واستعماله في تجويه المستوى وحل مسائل بسيطة حول البرمجة الخطية.

I- معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

1- أنشطة

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ المعادلة $3x-2y+1=0$

هل الأزواج $(1;2)$ و $(2;-1)$ و $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ حلول للمعادلة

لنحدد جميع حلول المعادلة

لتكن S مجموعة الحلول

نضع $x=a$ ومنه $y=\frac{3a+1}{2}$ إذن $S=\left\{\left(a;\frac{3a+1}{2}\right)/a\in\mathbb{R}\right\}$

2- تعريف

كل معادلة على شكل $ax+by+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية معلومة هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حل المعادلة $ax+by+c=0$ هو إيجاد جميع الأزواج التي تحققها

تمرين

حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلات $2x+y-1=0$ $\quad$ $2y+4=0$; $3x-1=0$

II – النظمات

1- أنشطة

أ- بين أن النظمة $\begin{cases}2x-3y=1\\4x+5y=-2\end{cases}$ تقبل حلا وحيدا بدون حساب المجهولين ثم حل النظمة بطريقتين مختلفتين (التعويضية و التألفية الخطية)

ب- بين أن النظمة $\begin{cases}2x-3y=3\\\frac{-2}{3}x+y=-2\end{cases}$ لا تقبل حلا

2- دراسة نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

أ- تعريف

نسمي نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل نظمة من شكل: $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ $\quad (x;y)\in\mathbb{R}^2$

حيث a و b و a' و b' أعداد حقيقية.

ب- دراسة عامة

لنحل في $\mathbb{R}^2$ النظمة $\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$ حيث $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$

$$\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b'(ax+by)-b(a'x+b'y)=b'c-bc'\\a(a'x+b'y)-a'(ax+by)=ac'-a'c\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(ab'-ba')x=b'c-bc'\\(ab'-a'b)y=ac'-a'c\end{cases}$$

و منه حل النظمة يتوقف على العدد $ab'-a'b$

العدد $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة نرمز له ب $\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}$

* إذا كان $ab'-a'b\neq 0$ فان النظمة تقبل حلا وحيدا

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-ba'} \quad \text{و} \quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$$

* إذا كان $ab'-a'b=0$ فان $\begin{cases} b'c-bc'=0 \\ ac'-a'c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

- إذا كان $ac'-a'c=0$ و $b'c-bc'=0$ فان S هي مجموعة حلول المعادلة $ax+by=c$
- إذا كان $ac'-a'c\neq 0$ أو $b'c-bc'\neq 0$ فان $S=\varnothing$

تعريف و خاصية

نعتبر a و b و a' و b' أعداد حقيقية حيث $(a;b)\neq(0;0)$ و $(a';b')\neq(0;0)$

* العدد $ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ نرمز له ب $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

نكتب $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

* للنظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$ حل وحيد إذا وفقط إذا كان $ab'-a'b\neq 0$

في هذه الحالة تسمى النظمة نظمة كرامر و حل النظمة هو:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} \; ; \; y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$$ حيث $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

* للنظمة $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c \end{cases}$ ما لانهاية من الحلول أو ليس لها حلا إذا وفقط إذا كان $ab'-a'b=0$

في هذه الحالة: - إذا كان $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=0$ فان S هي مجموعة حلول المعادلة $ax+by=c$

- إذا كان $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}\neq 0$ فان $S=\varnothing$

تمرين

1- حل في $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}x-y=2 \\ 3x+\sqrt{3}y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{2}x-y=2 \\ x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y=-2 \\ -3x-\frac{3}{2}y=3 \end{cases}$$

2- حل و ناقش وفق البارامتر m النظمة $\begin{cases} mx+4y=m+2 \\ x+my=2 \end{cases}$

3- نظمات تالفة أخرى

أ- نظمة ثلاث معادلات بمجهولين

حل في $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2x-5y=1 \\ x+2y=-4 \\ 3x-4y=-2 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 2x+5y=1 \\ x-y=4 \\ 3x+y=5 \end{cases}$$

ب- نظمة معادلات من الدرجة الأولى بعدة مجاهيل

حل في $\mathbb{R}^3$

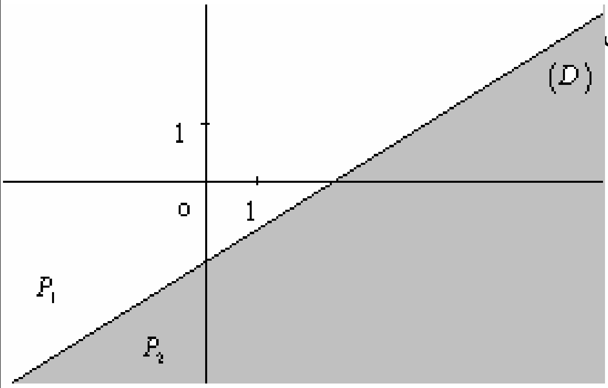
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ x-2y+2z=5 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 2x-y+3z=2 \\ x+2y-z=1 \end{cases}$$

III- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

1- إشارة $ax+by+c$

خاصية : نقباها

كل مستقيم (D) معادلته $ax+by+c=0$ يحدد في المستوى نصفي مستوى مفتوحين P_1 و P_2 (لايتضمنان (D))
أحدهما هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c\prec 0$
و الأخرهو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $ax+by+c\succ 0$



ملاحظة

لتحديد إشارة $ax+by+c$ يكفي تحديدها من أجل زوج $(x_0;y_0)$ إحداثيتي نقطة A من المستوى لا تنتمي إلى (D) نصف المستوى الذي يحتوي على A و حافته (D) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تكون فيه إشارة $ax+by+c$ هي إشارة ax_0+by_0+c. و نصف المستوى الآخر هو مجموعة النقط $M(x;y)$ التي كون فيه إشارة $ax+by+c$ هي عكس إشارة ax_0+by_0+c

أمثلة

أدرس في $\mathbb{R}^2$ إشارة كل من $-2x+3y-2$ و $2y-1\succ$

تمرين

حل في $\mathbb{R}^2$ مبيانيا

$$\begin{cases}2x+y\prec 0\\3x+y\leq 2\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}3x+y\prec 0\\x-y+4\succ 0\\2x+5y+8\succ 0\end{cases}$$

2- البرمجة الخطية

تمرين

يصنع صانع منتوجين A و B بواسطة مواد أولية M_1 و M_2 و M_3 .
يتطلب صنع وحدة من المنتوج A: 1 كيلو من M_1 و 3 كيلو من M_2 و3 كيلو من M_3 .
يتطلب صنع وحدة من المنتوج B: 2 كيلو من M_1 و 2 كيلو من M_2 و كيلو واحد من M_3 .
المواد المتوفرة في اليوم الواحد هو 20 كيلو من M_1 و 30 كيلو من M_2 و27 كيلو من M_3.
إذا علمت أن بيع وحدة من نوع A يحقق ربحا قدره 40 درهما و بيع وحدة من نوع B يحقق ربحا قدره 20 درهما. فما هو عدد وحدات منتوج A و عدد وحدات منتوج B اللذانيحققان أكبر ربح؟

لتكن x عدد وحدات منتوج A و y عدد وحدات منتوج B
لإنتاج A و B يتطلب $(x+2y)Kg$ من M_1 حيث $x+2y\prec 20$ و $(3x+2y)Kg$ من M_2 حيث $3x+2y\prec 30$ و $(3x+y)Kg$ من M_3 حيث $3x+y\prec 27$
الزوج $(x;y)$ الذي يمثل إنتاج ينتمي إلى مجموعة حلول

$$\begin{cases}x\geq 0\\y\geq 0\\x+2y-20\prec 0\\3x+2y-30\prec 0\\3x+y-27\prec 0\end{cases}$$

الربح هو $40x+20y$
نعتبر $(\Delta_0):40x+20y=0$ و $(\Delta_b):40x+20y=b$ حيث b ربح عند إنتاج x وحدة من منتوج A و y عدد وحدة من منتوج B و حيث (Δ_b) يحتوي على الأقل على نقطة من الجزء الملون
b تأخذ أكبر قيمة عند زوج إحداثيتي تقاطع المستقيمين ذا المعادلتين $3x+y=27$; $3x+2y=30$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = (8;3)$$

الربح القصوي هو $40 \times 8 + 20 \times 3 = 380DH$