★★

Z ¿ y º « Z ¨ ^ ¬
2016 " Ó ◎ Ž
- É Î ¿ Î ä

NS 22

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵏⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	3
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها	المعامل	7

تعليمات عامة

عدد الصفحات: 3 (الصفحة الأولى تتضمن تعليمات ومكونات الموضوع والصفحتان المتبقيتان تتضمنان موضوع الامتحان)؛
يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة؛
يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه؛
ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة؛
بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة.

مكونات الموضوع

يتكون الموضوع من أربعة تمارين و مسألة، مستقلة فيما بينها، و تتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين الأول	المتتاليات العددية	5.2 نقط
التمرين الثاني	الهندسة الفضائية	3 نقط
التمرين الثالث	الأعداد العقدية	3 نقط
التمرين الرابع	حساب الاحتمالات	3 نقط
مسألة	دراسة دالة عددية و حساب التكامل	5.2 نقط

- بالنسبة للمسألة ، يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري.

التصحيح :

تصحيح التمرين الأول :

(1

- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-3 &= \frac{3+u_n}{5-u_n}-3 \\ &= \frac{3+u_n-15+3u_n}{5-u_n} \\ &= \frac{4u_n-12}{5-u_n} \\ &= \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)} \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1}-3=\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ لكل n من $\mathbb{N}$

-

✓ من أجل $n=0$: لدينا $u_0=2$ إذن $u_0<3$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

- نفترض أن : $u_n<3$
- و نبين أن : $u_{n+1}<3$

لدينا $u_{n+1}-3=\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$

و حسب الإفتراض لدينا : $u_n<3$

إذن $u_n-3<0$ و $3-u_n>0$

إذن : $\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}<0$

و منه $u_{n+1}-3<0$

و بالتالي $u_{n+1}<3$

✓ نستنتج **أن** $u_n<3$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

(2 **أ-** ليكن $n\in\mathbb{N}$:

▪

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{3-u_{n+1}} \\
&= \frac{\dfrac{3+u_n}{5-u_n}-1}{\dfrac{4(3-u_n)}{5-u_n}} \\
&= \frac{\dfrac{3+u_n-5+u_n}{5-u_n}}{\dfrac{4(3-u_n)}{5-u_n}} \\
&= \frac{2u_n-2}{4(3-u_n)} \\
&= \frac{2(u_n-1)}{4(3-u_n)} \\
&= \frac{1}{2}\times v_n
\end{aligned}
$$

إذن $v_{n+1}=\frac{1}{2}\times v_n$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{3-u_0}=\frac{2-1}{3-2}=1$

▪ لدينا : $v_n=v_0\times q^n$

إذن $v_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

▪

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n} &\Leftrightarrow u_n - 1 = (3 - u_n) v_n \\ &\Leftrightarrow u_n - 1 = 3v_n - u_n v_n \\ &\Leftrightarrow u_n + u_n v_n = 1 + 3v_n \\ &\Leftrightarrow u_n (1 + v_n) = 1 + 3v_n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n} \end{aligned}$$

إذن : $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

▪ و بما أن $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ فإن $u_n = \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج- بما أن $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{1}$ و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

تصحيح التمرين الثاني

(1 **أ-** لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,-2)$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$

و منه : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

ب- لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $(2)x + (2)y + (1)z + d = 0$

و بما أن $A(2,1,3) \in (ABC)$ فإن $(2)(2)+(2)(1)+(1)(3)+d = 0$ أي $d = -9$

وبالتالي : $2x + 2y + z - 9 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2) أ- __طريقة 1:__

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (S) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 = 34 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 34 + 1 + 1 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow (x-(1))^2 + (y-(-1))^2 + (z-(0))^2 = (6)^2 \end{aligned}$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,-1,0)$ و أن شعاعها هو 6

__طريقة 2:__ معادلة الفلكة الفلكة (S) هي : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$

لدينا : $\begin{cases} \dfrac{-\alpha}{2} = \dfrac{-(-2)}{2} = 1 \\ \dfrac{-\beta}{2} = \dfrac{-(2)}{2} = -1 \\ \dfrac{-\gamma}{2} = \dfrac{-(0)}{2} = 0 \end{cases}$ إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,-1,0)$

و لدينا : $R = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\delta}}{2} = \dfrac{\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (0)^2 - 4(-34)}}{2} = \dfrac{\sqrt{144}}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

إذن شعاع الفلكة (S) هو 6

ب- لدينا : $d(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|2(1) + 2(-1) + (0) - 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = \dfrac{9}{3} = 3$

بما أن $d(\Omega,(ABC)) < R$ ($R = 6$ شعاع الفلكة (S))

فإن : المستوى $\left(ABC\right)$ يقطع الفلكة $\left(S\right)$ وفق دائرة $\left(\Gamma\right)$

3) أ- لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم $\left(\Delta\right)$ المار من $\Omega\left(1,-1,0\right)$ و العمودي على المستوى $\left(ABC\right)$

بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(2,2,1\right)$ متجهة منظمية للمستوى $\left(ABC\right)$ و بما أن $\left(\Delta\right)$ عمودي على المستوى $\left(ABC\right)$

فإن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(2,2,1\right)$ هي متجهة موجهة للمستوى $\left(ABC\right)$

و لدينا $\Omega\left(1,-1,0\right)\in\left(\Delta\right)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم $\left(\Delta\right)$ هو : $\left(t\in\mathbb{R}\right)$ $\begin{cases} x=(1)+t(2) \\ y=(-1)+t(2) \\ z=(0)+t(1) \end{cases}$

أي : $\left(t\in\mathbb{R}\right)$ $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}$

ب- ليكن $H\left(x_H,y_H,z_H\right)$ مركز الدائرة $\left(\Gamma\right)$ (H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى $\left(ABC\right)$)

$$H\left(x_H,y_H,z_H\right)\in\left(\Delta\right)\cap\left(ABC\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ 2x_H+2y_H+z_H-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ 2(1+2t)+2(-1+2t)+(t)-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ t=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3 \\ y_H = 1 \\ z_H = 1 \end{cases}$$

و منه النقطة H هي B

و بالتالي : مركز الدائرة (Γ) هو النقطة B.

تصحيح التمرين الثالث

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 29 = 0$

لدينا : $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(29) = -100$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z = \frac{-(-4) - i\sqrt{100}}{2(1)} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(-4) + i\sqrt{100}}{2(1)}$$

$$z = \frac{4 - 10i}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{4 + 10i}{2}$$

$$z = 2 - 5i \quad \text{أو} \quad z = 2 + 5i$$

إذن : $S = \{2 - 5i , 2 + 5i\}$

2) أ-

- لدينا $u = b - \omega = (5 + 8i) - (2 + 5i) = 5 + 8i - 2 - 5i = 3 + 3i$

إذن $u = 3 + 3i$

- لدينا $|u| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$u = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \checkmark$$

إذن $\arg u \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

ب- نعلم أن $\arg\overline{u} \equiv -\arg u\,[2\pi]$ إذن $\arg\overline{u} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

ج-

- $a - \omega = (5 + 2i) - (2 + 5i) = 5 + 2i - 2 - 5i = 3 - 3i = \overline{3 + 3i} = \overline{u}$
- بما أن : $a - \omega = \overline{u}$ فإن $|a - \omega| = |\overline{u}|$

و نعلم أن $|\overline{u}| = |u|$ إذن $|a - \omega| = |u|$ و منه $|a - \omega| = |b - \omega|$

و بالتالي $\Omega A=\Omega B$

- لدينا $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{u}{\overline{u}}\right)[2\pi]$

إذن $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\arg(u)-\arg\overline{u}\,[2\pi]$

إذن $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}-\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)[2\pi]$

و منه $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

د- نعتبر الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

لنحدد صورة النقطة A بالدوران R

__طريقة 1:__

بما أن $\begin{cases}\Omega A=\Omega B\\ \arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ فإن $\begin{cases}\Omega A=\Omega B\\ \left(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ و منه $R(A)=B$

__طريقة 2 :__

الكتابة العقدية للدوران R هي $z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$

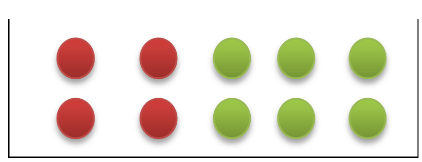
إذن $z'-(2+5i)=i\left(z-(2+5i)\right)$ أي : $z'=iz+7+3i$

لنحدد صورة النقطة A بالدوران R

$$z'=ia+7+3i=i(5+2i)+7+3i=5i-2+7+3i=5+8i=b$$

و منه صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة B

تصحيح التمرين الرابع



التجربة " نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة .

لدينا $card\,\Omega = C_{10}^{2} = 45$

1) ليكن A الحدث : " الكرتان المسحوبتان حمراوان " .

لدينا $cardA = C_4^2 = 6$ إذن $p(A) = \dfrac{cardA}{card\,\Omega} = \dfrac{6}{45}$ و منه : $p(A) = \dfrac{2}{15}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المتبقية في الصندوق بعد سحب الكرتين

أ. لنحدد القيم التي يأخذها X :

- إذا سحبنا كرتين حمراوتين من الصندوق فإنه يتبقى لنا كرتين حمراوتين في الصندوق إذن $X = 2$
- إذا سحبنا كرة حمراء و كرة خضراء فإنه يتبقى لنا ثلاث كرات حمراء في الصندوق إذن $X = 3$
- إذا سحبنا كرتين خضراوتين فإنه يتبقى لنا أربع كرات حمراء في الصندوق إذن $X = 4$

إذن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي $\{2,3,4\}$

ب.

- $p(X = 3) = \dfrac{C_4^1 \times C_6^1}{45} = \dfrac{4\times 6}{45} = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$
- لنحدد قانون احتمال X :

✓ $p(X = 2) = p(A) = \dfrac{2}{15}$

✓ $p(X = 3) = \dfrac{8}{15}$

✓ $p(X = 4) = \dfrac{C_6^2}{45} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{5}{15}$

x_i	2	3	4
$p\ X = x_i$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{5}{15}$

تصحيح المسألة :

I. **1)** أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^{x} = -\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0 \\ \lim_{x\to-\infty} -4e^{x}=0 \end{cases}$

ب- لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-4e^{x}=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

2) أ- لدينا **:** $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^{x}=\lim_{x\to+\infty} 2x-2+e^{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{x}-4=+\infty \end{cases}$

ب-

- لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x}+\frac{e^{2x}-4e^{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x}+\frac{e^{x}}{x}\left(e^{x}-4\right)=+\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x}=2 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}=+\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{x}-4=+\infty \end{cases}$

- بما أن $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty \end{cases}$ فإن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) أ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f'(x)=\left(2x-2+e^{2x}-4e^{x}\right)'=2+2e^{2x}-4e^{x}=2\left(e^{2x}-2e^{x}+1\right)$

إذن : $f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)^{2}$ **لكل** x **من** $\mathbb{R}$

ب- لدينا $f'(x)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ و $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

ج- لنبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ بحيث $f(\alpha)=0$

✓ f متصلة على $[1,\ln 4]$

✓ f تزايدية قطعا على $[1,\ln 4]$

✓ لدينا : $\begin{cases} f(1)=e^2-4e=e(e-4) \\ f(\ln 4)=2\ln(4)-2=2(\ln(4)-1) \end{cases}$ إذن $f(1)\times f(\ln 4)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1,\ln 4[$ بحيث $f(\alpha)=0$

4) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $f(x)-(2x-2)=e^{2x}-4e^x=e^x(e^x-4)$

بما أن : $e^x>0$ فإن إشارة $f(x)-(2x-2)$ هي إشارة e^x-4

لدينا : $e^x-4=0 \Leftrightarrow x=\ln 4$

- على المجال $]\ln 4,+\infty[$: $x>\ln 4$

إذن $e^x>4$

إذن $e^x-4>0$

إذن $f(x)-(2x-2)>0$

و منه (C_f) يوجد فوق المستقيم (D) على المجال $]\ln 4,+\infty[$

- على المجال $]-\infty,\ln 4[$: $x<\ln 4$

إذن $e^x<4$

إذن $e^x-4<0$

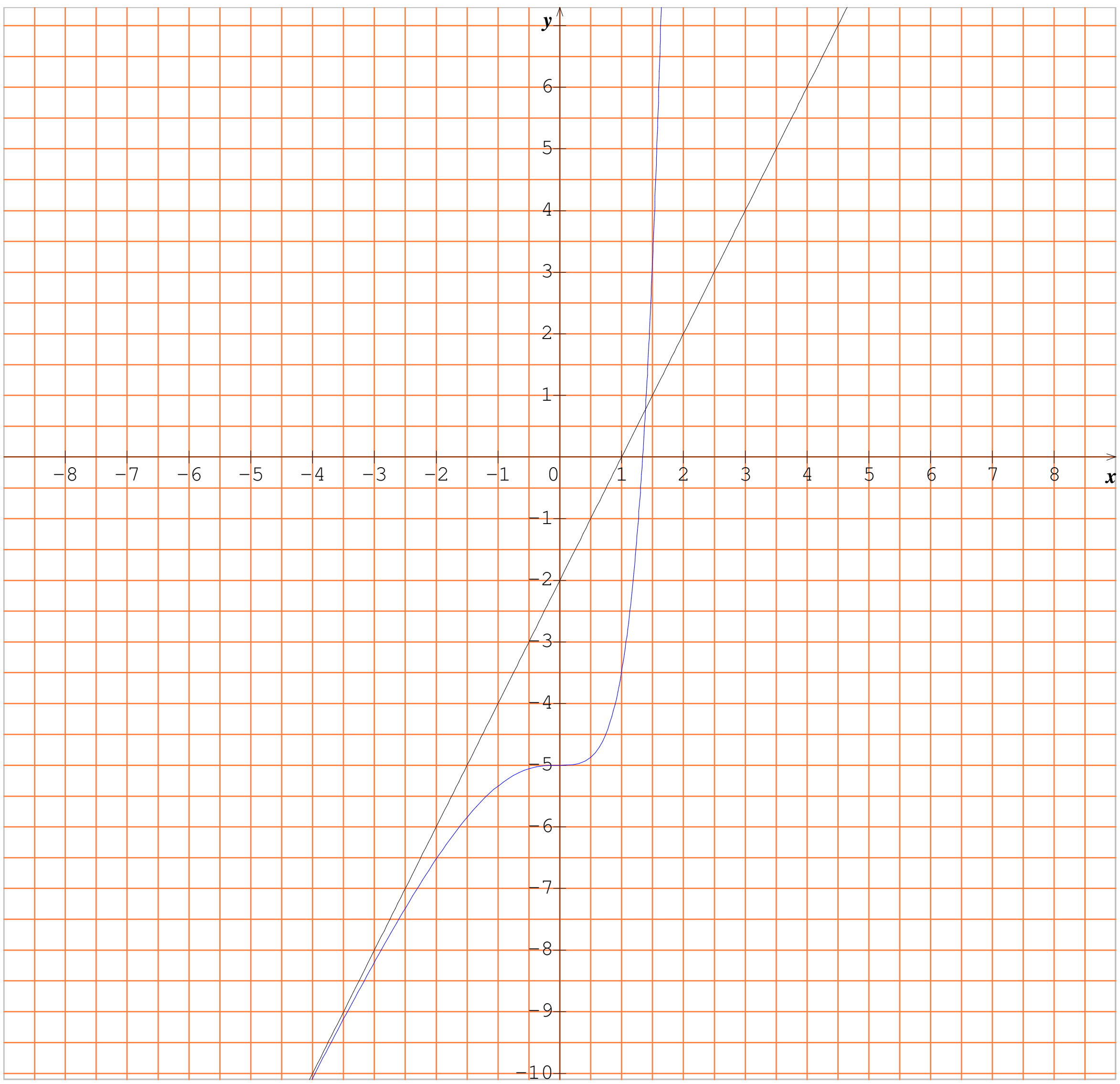
إذن $f(x)-(2x-2)<0$

و منه (C_f) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty,\ln 4[$

ب- بما أن f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند العدد 0 فإن النقطة التي زوج إحداثيتيها $(0,f(0))$ هي نقطة انعطاف

و منه المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثيتيها هو $(0,-5)$

ج-



5) أ-

$$\int_0^{\ln 4}\left(e^{2x}-4e^{x}\right) \qquad =\left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^{x}\right]_0^{\ln 4}$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2\ln 4}-e^{\ln 4}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2(0)}-4e^{0}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times 16-4\times 4\right)-\left(\frac{1}{2}-4\right)$$

$$=8-16-\frac{1}{2}+4$$

$$=-\frac{9}{2}$$

ب- لنحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم $\left(D\right)$ و محور الأراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=\ln 4$:

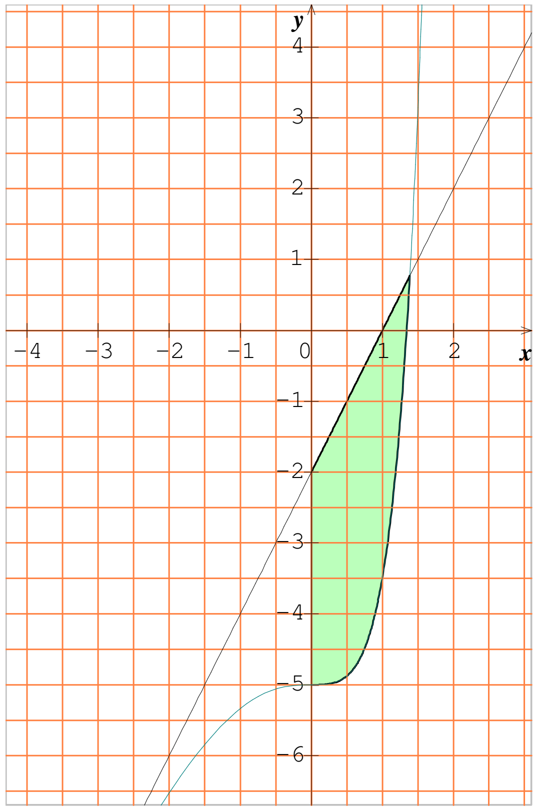
$$A=\int_0^{\ln 4}\left|f\left(x\right)-\left(2x-2\right)\right|dx\times\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|$$

بما أن : على المجال $\left[0,\ln 4\right]$: $\qquad f\left(x\right)-\left(2x-2\right)\leq 0$ فإن :

$$A=\int_0^{\ln 4}\left(\left(2x-2\right)-f\left(x\right)\right)dx\times 1cm\times 1cm$$

إذن $\qquad A=\int_0^{\ln 4}-\left(e^{2x}-e^{x}\right)dx\,.cm^2$

و منه $\qquad A=\frac{9}{2}.cm^2$



II. 1) أ- لنحل المعادلة التفاضلية $(E): y''-3y'+2y=0$

المعادلة المميزة : $r^2-3r+2=0$

لدينا $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=1$

إذن حلي المعادلة هما : $r_1=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2(1)}=1$ و $r_2=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2(1)}=2$

مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$y: x \mapsto \alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

أي :
$$y: x \mapsto \alpha e^{x}+\beta e^{2x} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

ب- لنحدد الحل g للمعادلة (E) الذي يحقق الشرطين $g(0)=-3$ و $g'(0)=-2$

- g حل للمعادلة (E) إذن $g(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{2x} \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

(حيث α و β سيتم تحديدهما)

- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = \alpha e^{x} + 2\beta e^{2x}$
- لدينا : $\begin{cases} g(0) = -3 \\ g'(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha + 2\beta = -2 \end{cases}$

إذن $\alpha = -4$ و $\beta = 1$

و منه : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = (-4)e^{x} + (1)e^{2x}$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) = e^{2x} - 4e^{x}$

2) لتكن h الدالة العددية المعرفة على المجال $]\ln 4, +\infty[$ بما يلي :

$$h(x) = \ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right) = \ln\left(g(x)\right) = \ln\left(f(x) - (2x-2)\right)$$

أ-

- لدينا h متصلة على $]\ln 4, +\infty[$

(لأن الدالة g متصلة على $]\ln 4, +\infty[$ و $\left(\forall x \in]\ln 4, +\infty[\right) : g(x) > 0$)

- الدالة h قابلة للإشتقاق على $]\ln 4, +\infty[$

ليكن $x \in]\ln 4, +\infty[$:

$$h'(x) = \left(\ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right)\right)' = \frac{\left(e^{2x} - 4e^{x}\right)'}{e^{2x} - 4e^{x}} = \frac{2e^{2x} - 4e^{x}}{e^{2x} - 4e^{x}} = \frac{2\left(e^{x} - 2\right)}{e^{x} - 4}$$

على المجال $]\ln 4, +\infty[$ لدينا : $e^{x} - 4 > 0$ و $e^{x} - 2 > 0$

إذن $\left(\forall x \in]\ln 4, +\infty[\right) : h'(x) > 0$

و منه الدالة h تزايدية قطعا على $]\ln 4, +\infty[$

بما أن h متصلة وتزايدية قطعا على $]\ln 4, +\infty[$ فإن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة من مجال J نحو $]\ln 4, +\infty[$

حيث : $J = h\left(]\ln 4, +\infty[\right) = \left]\lim_{x \to \ln 4^{+}} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

لأن : $\lim_{x \to \ln 4^{+}} h(x) = \lim_{x \to \ln 4^{+}} \ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right) = \lim_{t \to 0^{+}} \ln(t) = -\infty$

و $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(e^{2x} - 4e^{x}\right) = \lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$

ب-

- لدينا : $h(\ln 5) = \ln\left(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5}\right) = \ln(25 - 20) = \ln 5$

إذن : $h\left(\ln 5\right)=\ln 5$

▪

✓ الدالة h قابلة للإشتقاق في $\ln\left(5\right)$

✓ و لدينا : $h'\left(\ln\left(5\right)\right)=6$ إذن $h'\left(\ln\left(5\right)\right)\neq 0$

إذن الدالة h^{-1} قابلة للإشتقاق في $h\left(\ln 5\right)=\ln 5$

و لدينا : $\left(h^{-1}\right)'\left(\ln 5\right)=\left(h^{-1}\right)'\left(h\left(\ln 5\right)\right)=\dfrac{1}{h'\left(\ln 5\right)}=\dfrac{1}{6}$

إذن : $\left(h^{-1}\right)'\left(\ln 5\right)=\dfrac{1}{6}$