

سلسلة 1	دراسة الدوال	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية
		<p><b>تمرين 1:</b> نعتبر الدالة العددية <math>f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}</math></p> <p>(1) بين أن <math>f</math> زوجية</p> <p>(2) احسب <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x)</math> و <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)</math> ثم أول النتائج هندسيا</p> <p>(3) أحسب <math>f'(x)</math> لكل <math>x</math> من <math>Df</math></p> <p>(4) ضع جدول تغيرات <math>f</math></p> <p>(5) أنشئ <math>Cf</math> منحنى الدالة <math>f</math> في معلم متعامد.</p>
		<p><b>تمرين 2:</b> نعتبر الدالة العددية <math>f(x) = \frac{2x^2 + x + 8}{4x}</math> و ليكن <math>Cf</math> تمثيلها المبياني في معلم متعامد.</p> <p>(1) حدد <math>Df</math></p> <p>(2) احسب نهايات <math>f</math> عند محاداتها.</p> <p>(3) بين أن المستقيم <math>(\Delta): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}</math> مقارب مائل لـ <math>Cf</math> جوار <math>+\infty</math> و جوار <math>-\infty</math></p> <p>(4) ضع جدول تغيرات <math>f</math></p> <p>(5) أنشئ <math>Cf</math></p>
		<p><b>تمرين 3:</b> نعتبر الدالة العددية <math>f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}</math></p> <p>(1) حدد <math>Df</math></p> <p>(2) احسب نهايات <math>f</math> عند محاداتها.</p> <p>(3) أدرس الفروع اللانهائية لـ <math>Cf</math></p> <p>(4) تحقق أن: <math>\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2}</math></p> <p>(5) أدرس تغيرات <math>f</math> (ضع جدول التغيرات)</p> <p>(6) أنشئ <math>Cf</math> منحنى الدالة <math>f</math></p>

تمرين 1 : نعتبر الدالة العددية  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x+1) \neq 0\}$$

لدينا :  $Df = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0 \text{ et } x+1 \neq 0\}$  ،  $Df = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ et } x \neq -1\}$

$$x \in Df \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \neq -1 \\ -x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow -x \in Df$$

$$Df = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

و  $\forall x \in \mathbb{R} f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x)$  إذن  $f$  زوجية

1

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$  ، إذن يجب تحديد إشارة المقام  $x^2 - 1$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	-	+	+

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0^+$  منه :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0^-$  منه :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

2

مما يعني أن منحنى الدالة يقبل مقاربا عموديا معادلته  $x = 1$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$  إذن منحنى الدالة يقبل مقاربا أفقيا معادلته  $y = 2$  جوار  $+\infty$

رياضيا لا يصح كتابة :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{2}{0} = \infty$  ، لكننا قد نستعملها في الحصص الدراسية وربما حتى الفروض ، لكن رغم ذلك تظل تعبيراً غير صحيح من الناحية الرياضياتية ، لذلك ستكون مرفوضة في الامتحان الوطني ، من أجل ذلك الأفضل التعود على استعمال التعليل الرياضي السليم

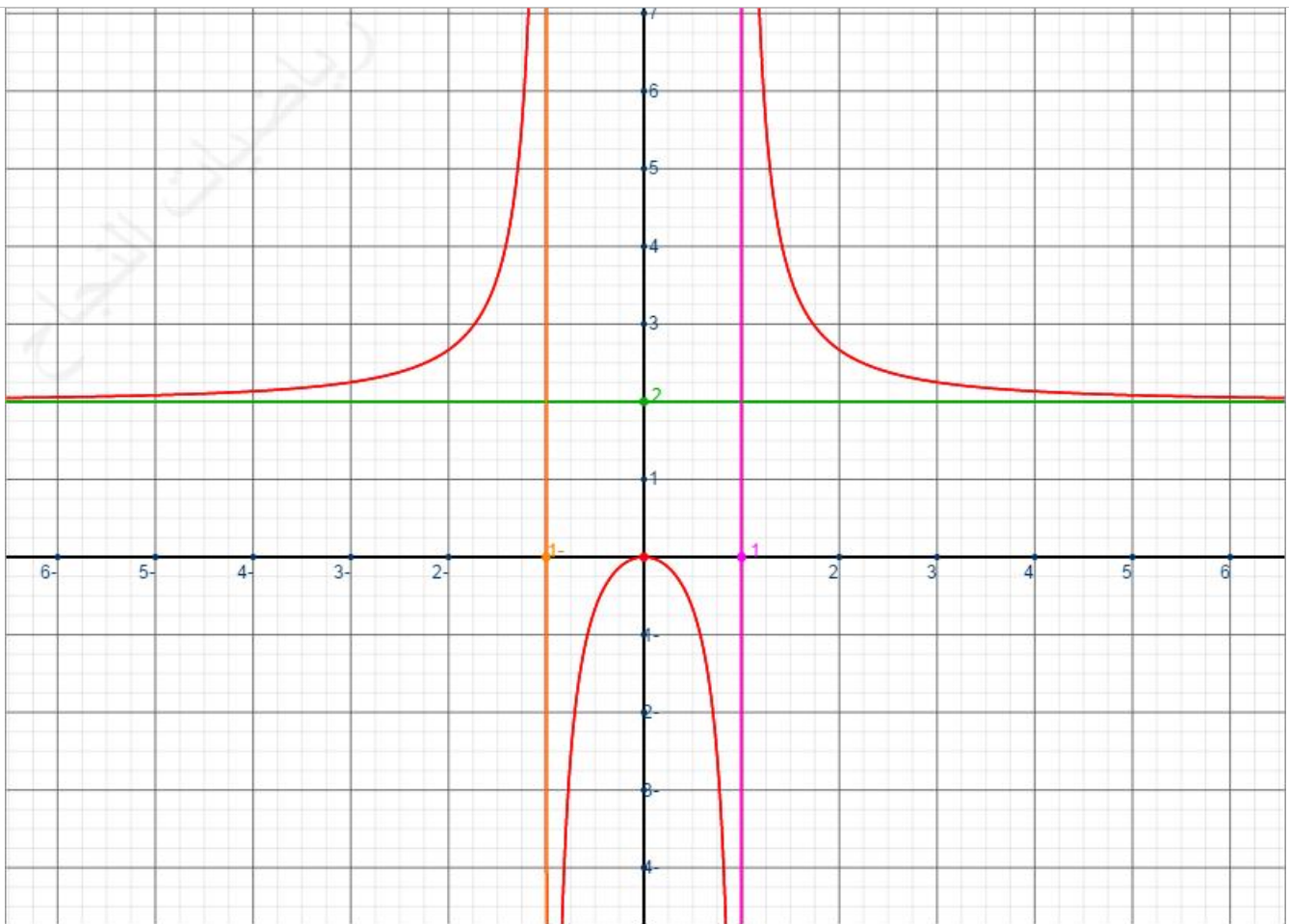
$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \frac{(2x^2)'(x^2 - 1) - 2x^2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \times 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{4x^3 - 4x - 4x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

3

طبقتنا قاعدة مشتقة خارج :  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$-4x$	+	+	-	-	-
$f'(x)$	+	+	-	-	-
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$0$	$+\infty$	$-\infty$

4



5

أهم ما يجب احترامه في منحنى الدالة هو تطابق المنحنى مع النتائج المحصل عليها في الأسئلة من مماسات ومقاربات و زوجية وفروع لانهائية...، في المنحنى أعلاه المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$  (اللون الأخضر) يمثل مقاربا أفقيا ( $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ) بينما المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  (اللون البنفسجي) يمثل مقاربا عموديا ( $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ ) ونظرا لكون الدالة زوجية فإن المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  هو أيضا مقارب عمودي.

**تمرين 2:** نعتبر الدالة العددية  $f(x) = \frac{2x^2 + x + 8}{4x}$  وليكن  $C_f$  تمثيلها المبياني في معلم متعامد.

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / 4x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

(يستحسن كتابة مجموعة التعريف على شكل اتحاد مجالات عوض  $(\mathbb{R}_{\setminus \{0\}}$ )

1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

2

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 + x + 8 = 8$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 4x = 0^+$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 4x = 0^-$  إذن:  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

المحددات نعني بها  $+\infty$  و  $-\infty$  (إن لم تكن الدالة معرفة على مجال محدود) والأعداد التي لا تنتمي إلى مجموعة التعريف وتمثل أحد أطراف مجموعة التعريف، مثلا إذا كان:  $Df = ]-4, 2] \cup ]7, +\infty[$  فالمحددات هي  $+\infty$  و  $-4$  و  $7$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} - \frac{2x + 1}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 8}{4x} - \frac{2x^2 + x}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{4x} = 0$$

3

و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{4x} = 0$  إذن:  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$  (Δ) مقارب مائل لـ  $C_f$  جوار  $+\infty$  و جوار  $-\infty$

عندما نتوفر على معادلة المقارب لاداعي لتطبيق مراحل البحث عن المقارب (أثناء دراسة الفروع اللانهائية).

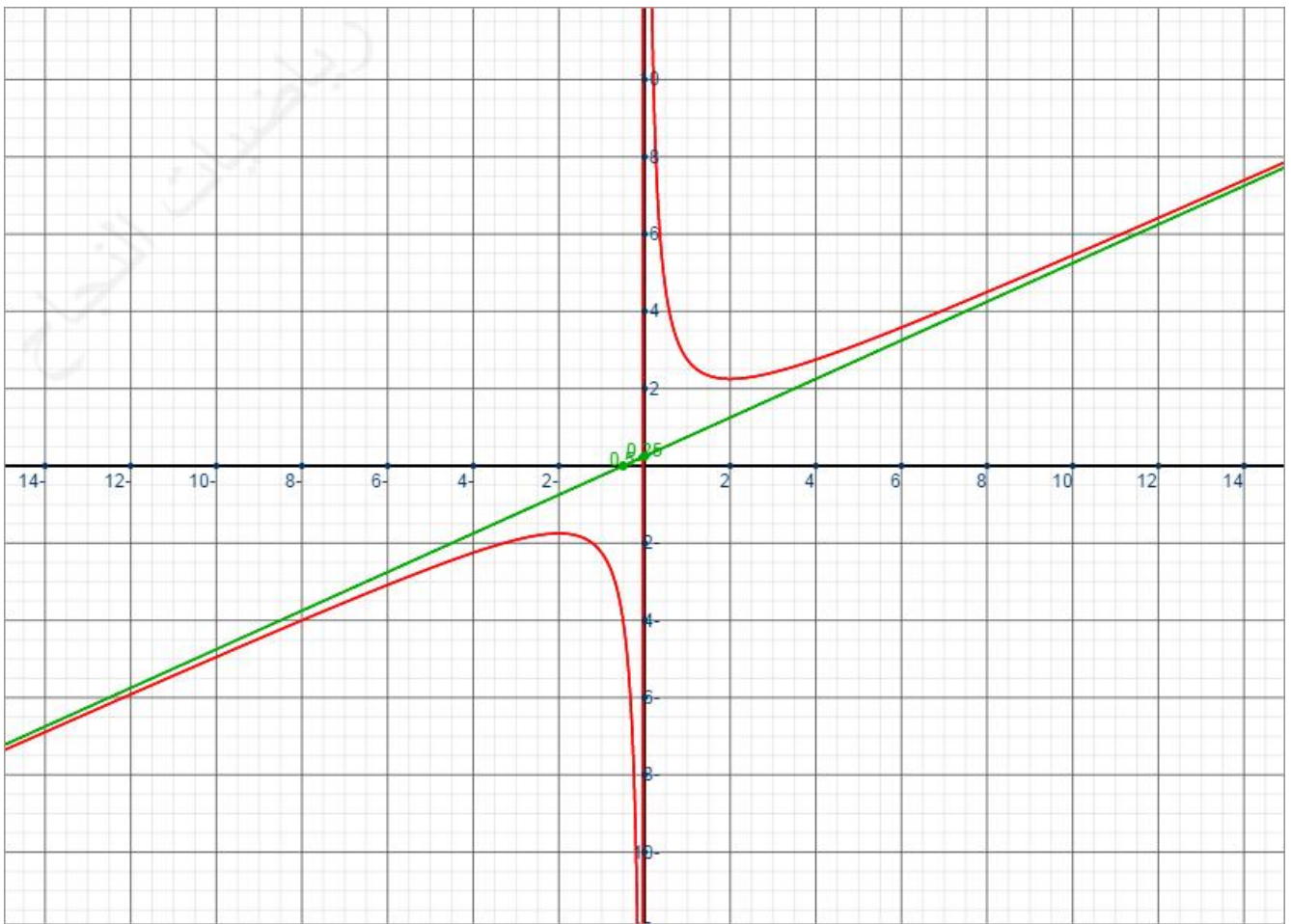
$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \frac{(2x^2 + x + 8)'(4x) - (2x^2 + x + 8)(4x)'}{(4x)^2} = \frac{(4x+1)(4x) - (2x^2 + x + 8) \times 4}{16x^2}$$

$$f'(x) = \frac{16x^2 + 4x - 8x^2 - 4x - 32}{16x^2} = \frac{8x^2 - 32}{16x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$

لدينا :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	-	-	+	+
$f'(x)$	+	-	-	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{7}{4}$	$-\infty$	$\frac{9}{4}$	$+\infty$

منه : 4



5

**تمرين 3 :** نعتبر الدالة العددية  $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$$

$$Df = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$$

و

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 2 = -2$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0^-$  إذن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{x^3 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ : ولدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \times \frac{x^3 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ : ولدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ نعلم أن}$$

إذن  $Cf$  يقبل فرعاً شلجيمياً باتجاه محور الأرتيب جوار  $+\infty$  و  $-\infty$

$$\forall x \in Df \quad f'(x) = \frac{(x^3 - 2)'(x) - (x^3 - 2)(x)'}{(x)^2} = \frac{(3x^2)(x) - (x^3 - 2) \times 1}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 + 2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2}{(x)^2} = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2} = \frac{2(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2}$$

ولدينا:  $\forall \in Df \quad x^2 > 0$

ولدينا محددة الحدودية  $x^2 - x + 1$  هي  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$  فهي موجبة ( $a = 1 > 0$ )

منه:

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
$x+1$	-		+	+
$f'(x)$	-		+	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$

