السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الحسابيات	سلسلة 1

تمرين 1 : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان

- حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 145^{2015} على 12
- حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 247^{2015} على 7
- حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 2015^{2016} على 11
- بين أن : $\forall n\in IN \quad 7 / 3^{2n}+3\times 2^{n+1}$
- بين أن : $\forall n\in IN^* \quad (n-1)^2 / (n^{n-1}-1)$

تمرين 2 : a و b و c عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان

1) بين أن : $(7a+3)\wedge(9a+4)=1$

2) بين أن : $(9a+4b)\wedge(2a+b)=a\wedge b$

3) مستعملا مبرهنة «Bezout» برهن أن : $a\wedge(bc)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases}$

أ) بين أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow (a+b)\wedge ab=1$

ب) بين أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow (a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2)=a-b$

ج) بين أن : $(a^2+b^2)\wedge ab=(a\wedge b)^2$

4) مستعملا مبرهنة «Bezout» برهن أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow a^2\wedge b^2=1$

أ) بين أن : $a^2/b^2 \Rightarrow a/b$

ب) بين أن : $a^2\wedge b^2=(a\wedge b)^2$

ج) بين أن : $\sqrt{5}\notin Q$

5) بين بالترجع أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow \forall n\in IN^* \quad a\wedge b^n=1$

أ) استنتج أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow \forall (n,m)\in IN^*\times IN^* \quad a^n\wedge b^m=1$

ب) بين أن : $\log_{10} 2\notin Q$

تمرين 3 : حل في Z^2 المعادلات التالية :

$17x+11y=1$	$3x-2y=1$	$10x=14y$
$15x+6y=11$	$10x-2y=6$	$5x-3y=7$

تمرين 4 : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .

1) بين أن : $(a+b)\wedge ab=1 \Leftrightarrow a\wedge b=1$

2) استنتج أنه لكل x و y من IN^* : $(x+y)\wedge(x\vee y)=x\wedge y$

3) حل في $IN^*\times IN^*$ النظمة : $\begin{cases} x+y=276 \\ x\vee y=1440 \\ x<y \end{cases}$

www.naja7math.com - رياضيات النجاح
رياضيات النجاح أ. سمير لخريسي
www.naja7math.com

سلسلة 1	الحسابيات حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

لدينا : $145\equiv 1[12]$ منه : $145^{2015}\equiv 1[12]$ إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 145^{2015} على 12 هو 1

لدينا : $247\equiv 2[7]$ منه : $247^{3}\equiv 8[12]$ منه : $247^{3}\equiv 1[7]$ (لأن : $8\equiv 1[7]$)

علما أن : $2015=3\times 671+2$ فإن : $\begin{cases}247^{3\times 671}\equiv 1[7]\\ 247^{2}\equiv 2^{2}[7]\end{cases}$ ومنه : $247^{2015}\equiv 4[7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 247^{2015} على 7 هو 4

لدينا : $2015\equiv 2[11]$ منه : $2015^{5}\equiv 32[11]$ منه : $2015^{5}\equiv -1[11]$ (لأن : $32\equiv -1[11]$)

علما أن : $2016=5\times 403+1$ فإن : $\begin{cases}2015^{5\times 403}\equiv (-1)^{403}\equiv -1[11]\\ 2015\equiv 2[11]\end{cases}$ ومنه : $2015^{2016}\equiv -2\equiv 9[11]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 2015^{2016} على 11 هو 9

لدينا : $9\equiv 2[7]$ منه : $9^{n}\equiv 2^{n}[7]$ منه : $9^{n}+3\times 2^{n+1}\equiv 2^{n}+3\times 2^{n+1}[7]$ منه : $9^{n}+3\times 2^{n+1}\equiv 7\times 2^{n}\equiv 0[7]$

بالتالي : $\forall n\in IN\quad 7/3^{2n}+3\times 2^{n+1}$

بالنسبة للقيم $n=1$ و $n=2$ العبارة صحيحة، الآن ليكن : $n>2$

$$1\equiv 1[n-1]$$
$$n\equiv 1[n-1]$$
$$\dots\equiv\dots$$
$$n^{n-2}\equiv 1[n-1]$$

لدينا : $n^{n-1}-1=(n-1)(n^{n-2}+n^{n-3}+\dots+n+1)$ وبما أن : $n^{k}\equiv 1[n-1]$ (لأن : $n\equiv 1[n-1]\Rightarrow n^{k}\equiv 1[n-1]$)

فإن : $n^{n-2}+n^{n-3}+\dots+n+1\equiv n-1\equiv 0[n-1]$ منه : $n-1/n^{n-2}+n^{n-3}+\dots+n+1$

منه : $\exists m\in Z/\ n^{n-2}+n^{n-3}+\dots+n+1=m(n-1)$ منه : $n^{n-1}-1=m(n-1)^{2}$

بالتالي : $\forall n\in IN^{*}\quad (n-1)^{2}/n^{n-1}-1$

تمرين 2 :

1 نضع : $d=(7a+3)\wedge(9a+4)$

منه : $\begin{cases}d/7a+3\\ d/9a+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/63a+27\\ d/63a+28\end{cases}\Rightarrow d/(63a+28)-(63a+27)\Rightarrow d/1\Rightarrow d=1$

بالتالي : $(7a+3)\wedge(9a+4)=1$

2 نضع : $d=a\wedge b$ و $\delta=(9a+4b)\wedge(2a+b)$

منه : $\begin{cases}d/a\\ d/b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/2a\ \ et\ d/9a\\ d/b\ \ et\ \ d/4b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/2a+b\\ d/9a+4b\end{cases}\Rightarrow d/\delta$

و : $\begin{cases}\delta/2a+b\\ \delta/9a+4b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta/8a+4b\ \ et\ \delta/9a+4b\\ \delta/18a+9b\ \ et\ \delta/18a+8b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta/a\\ \delta/b\end{cases}\Rightarrow\delta/d$

منه : $\delta=d$ أي : $(9a+4b)\wedge(2a+b)=a\wedge b$

3 لدينا من جهة : $\begin{cases}a\wedge b=1\\ a\wedge c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\,u+b(cv)=1\\ a\,u+c(bv)=1\end{cases}\Rightarrow\exists\, u,v\in Z^{2}\ (a\,u+bc\,v=1)\Rightarrow a\wedge(bc)=1$

www.naja7math.com - رياضيات النجاح

وعكسيا :

$$\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\exists (u_1,v_1)\in Z^2 \;/\; a u_1 + b v_1 = 1 \\ \exists (u_2,v_2)\in Z^2 \;/\; a u_2 + c v_2 = 1\end{cases} \Rightarrow (a u_1 + b v_1)(a u_2 + c v_2) = 1$$

$$\Rightarrow (a u_1 u_2 + c v_2 u_1 + b v_1 u_2) a + (v_1 v_2) bc = 1$$

$$\begin{cases}a\wedge b=1\\ a\wedge c=1\end{cases} \Rightarrow a\wedge(bc)=1$$

بالتالي : $\begin{cases}a\wedge b=1\\ a\wedge c=1\end{cases} \Leftrightarrow a\wedge (bc) = 1$

أ) ليكن: $a\wedge b=1$ ، نضع: $d=(a+b)\wedge a$ و $\delta=(a+b)\wedge b$

لدينا : $d=(a+b)\wedge a \Rightarrow \begin{cases} d/a+b\\ d/a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/b \\ d/a\end{cases} \Rightarrow d/a\wedge b \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1 \Rightarrow (a+b)\wedge a = 1$

و : $\delta=(a+b)\wedge b \Rightarrow \begin{cases} \delta/a+b\\ \delta/b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/a \\ \delta/b\end{cases} \Rightarrow \delta/a\wedge b \Rightarrow \delta/1 \Rightarrow \delta=1 \Rightarrow (a+b)\wedge b = 1$

الآن : $\begin{cases}(a+b)\wedge a=1\\(a+b)\wedge b=1\end{cases} \Rightarrow (a+b)\wedge (ab)=1$

ب) ليكن: $a\wedge b=1$

لدينا: $(a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2) = [(a-b)(a^2+ab+b^2)]\wedge[(a-b)(a+b)] = (a-b)[(a^2+ab+b^2)\wedge(a+b)]$

نضع: $d=(a^2+ab+b^2)\wedge(a+b)$ ، منه و باستعمال نتيجة السؤال السابق نجد :

$$\begin{cases}d/a+b\\ d/(a+b)^2-ab\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/(a+b)^2 \\ d/(a+b)^2 - ab\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a+b \\ d/ab\end{cases} \Rightarrow d/(a+b)\wedge ab \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

بالتالي : $a\wedge b=1 \Rightarrow (a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2) = a-b$

ج) نضع: $d=a\wedge b$ منه : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \;/\; \begin{cases}a=\alpha d\\ b=\beta d\end{cases} \;/\; \alpha\wedge\beta=1$

منه : $(a^2+b^2)\wedge ab = (d^2(\alpha^2+\beta^2))\wedge(d^2\alpha\beta) = d^2((\alpha^2+\beta^2)\wedge(\alpha\beta))$

نضع: $d=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha$ و $\delta=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta$

لدينا حسب نتيجة سابقة : $\alpha\wedge\beta=1 \Rightarrow \begin{cases}\alpha\wedge\beta=1\\ \alpha\wedge\beta=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha\wedge\beta\times\beta=1\\ \alpha\times\alpha\wedge\beta=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\wedge\beta^2=1\\ \alpha^2\wedge\beta=1\end{cases}$

منه : $d=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha \Rightarrow \begin{cases} d/(\alpha^2+\beta^2)\\ d/\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/\alpha^2+\beta^2 \\ d/\alpha^2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}d/\beta^2\\ d/\alpha\end{cases} \Rightarrow d/\alpha\wedge\beta^2 \Rightarrow d=1$

و : $\delta=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta \Rightarrow \begin{cases} \delta/(\alpha^2+\beta^2)\\ \delta/\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2+\beta^2 \\ \delta/\beta^2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\delta/\alpha^2\\ \delta/\beta\end{cases} \Rightarrow \delta/\alpha^2\wedge\beta \Rightarrow \delta=1$

الآن : $\begin{cases}(\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha=1\\ (\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta=1\end{cases} \Rightarrow (\alpha^2+\beta^2)\wedge(\alpha\beta)=1$ بالتالي : بين أن: $(a^2+b^2)\wedge ab = d^2 = (a\wedge b)^2$

4

لدينا :

$$a\wedge b=1 \Rightarrow \exists (u,v)\in Z^2 \;/\; au+bv=1 \Rightarrow au = 1-bv \Rightarrow a^2u^2=1-2bv+b^2v^2$$

$$\Rightarrow 2bv = 1+b^2v^2-a^2u^2 \Rightarrow 4b^2v^2 = 1+b^4v^4+a^4u^4+2b^2v^2-2a^2u^2-2a^2b^2u^2v^2$$

$$\Rightarrow a^2(2u^2+2b^2u^2v^2-a^2u^4)+b^2(2v^2-b^2v^4)=1$$

$$a\wedge b=1 \Rightarrow a^2\wedge b^2=1$$

أ) ليكن: a^2/b^2 و نضع: $d=a\wedge b$

إذن: $\exists k\in IN^2 \quad b^2=ka^2$ و $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \;\begin{cases}a=\alpha d\\ b=\beta d\end{cases} /\alpha\wedge\beta=1$

منه : $d^2\beta^2=kd^2\alpha^2$ منه : $\beta^2=k\alpha^2$ منه : α^2/β^2 وحيث أن : α^2/α^2 فإن: $\alpha^2/\alpha^2\wedge\beta^2$

		وبما أن : $\alpha^2 \wedge \beta^2 = 1 \Rightarrow \alpha \wedge \beta = 1$ فإن : $\alpha^2 / 1$ منه: $\alpha = 1$ منه : $\begin{cases} a = d \\ b = \beta d \end{cases}$ منه : $b = a d$ بالتالي : a / b
	ب)	بوضع : $d = a \wedge b$ نستنتج أن : $\exists \alpha, \beta \in IN^2 \left(\begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} \right) / \alpha \wedge \beta = 1$ و باستعمال نتيجة السؤال ج) نجد: $a^2 \wedge b^2 = d^2 \alpha^2 \wedge \beta^2 = d^2 \times 1 = d^2 = (a \wedge b)^2$
	ج)	نفترض أن : $\sqrt{5} \in Q$ إذن : $\left(\sqrt{5} = \frac{a}{b} \right) \exists a, b \in IN \times IN^*$ منه : $5b^2 = a^2$ منه: b^2 / a^2 و باستعمال نتيجة السؤال أ) نستنتج أن : b / a منه : $\exists k \in IN / a = k b$ منه : $5b^2 = k^2 b^2$ منه : $5 = k^2$ وبما أن: $4 < 5 < 9$ فإن : $4 < k^2 < 9$ منه : $2 < k < 3$ و هذا غير ممكن بالتالي : $\sqrt{5} \notin Q$
	أ)	ليكن $a \wedge b = 1$ و لنبين بالترجع أن : $\forall n \in IN^* \quad a \wedge b^n = 1$ بالنسبة لـ $n = 1$: العبارة صحيحة الآن نفترض أن : $a \wedge b^n = 1$ و لنبين أن: $a \wedge b^{n+1} = 1$ باستعمال نتيجة السؤال 3) نجد بسهولة أن : $\begin{cases} a \wedge b^n = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge b^n \times b = 1 \Rightarrow a \wedge b^{n+1} = 1$ و هذا ينهي البرهان . يجب الانتباه جيدا للعبارة، الافتراض لا يجب أن يتم على العبارة ككل بل على نتيجة الاستلزام فقط (إنه المنطق الرياضي)
) 5	ب)	ليكن : $n, m \in IN^* \times IN^*$ ، باستعمال نتيجة السؤال السابق مرتين نجد أن: استنتج أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b^m = 1 \Rightarrow b^m \wedge a = 1 \Rightarrow b^m \wedge a^n = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^m = 1$ نتيجة هذا السؤال هي خاصية بالدرس يمكن استعمالها دون برهان، لذلك فالهدف من السؤال هو تقديم برهان هذه الخاصية نفس الشيء ينطبق على السؤال الثالث
( )	ج)	نفترض أن : $\log_{10} 2 \in Q$ إذن : $\left(2^{\frac{m}{n}} = 10 \right) \exists \in m, n \in Z \times IN^*$ منه : $2^m = 10^n$ منه : منه : $2^m = 2^n \times 5^n$ و حيث أن : $5^n / 5^n$ فإن : $5^n / 2^m \wedge 5^n$ ، $5^n / 2^m$ و لكون : $2 \wedge 5 = 1$ فحسب السؤال السابق نستنتج أن: $2^m \wedge 5^n = 1$ منه : $5^n / 1$ أي : $5^n = 1$ منه : $n = 0$ و هذا يناقض كون : $n \in IN^*$ بالتالي : $\log_{10} 2 \notin Q$
		الهدف من هذا التمرين هو التمكن من استعمال القواعد الهامة التالية: مبرهنة Bezout (لأنها أحينا تكون الوسيلة الوحيدة للبرهان) $a \wedge bc = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases}$ ، $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^m = 1$ ، $d = a \wedge b \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in Z^2 \left(\begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} \right) / \alpha \wedge \beta = 1$ مبرهنة كوص (Gauss): $\begin{cases} a / bc \\ a \wedge b \end{cases} \Rightarrow a / c$ ، $ac \wedge bc = c\, a \wedge b$
		<u>تمرين 3</u> :
		لدينا : $10x = 14y \Leftrightarrow 5x = 7y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7k \\ y = 5k \end{cases} / k \in Z$ بالتالي: $S = \{ (7k; 5k) / k \in Z \}$

$3x-2y=1 \Leftrightarrow 3x-2y=3-2 \Leftrightarrow 3(x-1)=2(y-1) \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=2k\\ y-1=3k\end{cases} / k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases}x=2k+1\\ y=3k+1\end{cases} / k\in Z$

بالتالي: $S=\{(2k+1;3k+1) / k\in Z\}$

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص : $(2;-3)$ منه :

$17x+11y=1 \Leftrightarrow 17x+11y=2\times17-3\times11 \Leftrightarrow 17(x-2)=11(-y-3)$

$17x+11y=1 \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=11k\\ -y-3=17k\end{cases} / k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases}x=11k+2\\ y=-17k-3\end{cases} / k\in Z$

بالتالي: $S=\{(11k+2;-17k-3) / k\in Z\}$

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص للمعادلة $5x-3y=1$ هو $(2;3)$ منه الحل الخاص للمعادلة $5x-3y=7$ هو $(14;21)$ ، منه:

$5x-3y=1 \Leftrightarrow 5x-3y=5\times14-3\times21 \Leftrightarrow 5(x-14)=3(y-21)$

$5x-3y=1 \Leftrightarrow \begin{cases}x-14=3k\\ y-21=5k\end{cases} / k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases}x=3k+14\\ y=5k+21\end{cases} / k\in Z$

بالتالي: $S=\{(3k+14;5k+21) / k\in Z\}$

$10x-2y=6 \Leftrightarrow 5x-y=3 \Leftrightarrow y=5x-3$

بالتالي: $S=\{(k;5k-3) / k\in Z\}$

عندما يكون أحد المعاملات 1 أو −1 فنكتفي بكتابة أحد المجهولين بدلالة الآخر.

لدينا: $15x+6y=11 \Rightarrow 3(5x+2y)=11 \Rightarrow 3/11$ بالتالي : $S=\phi$

<u>تمرين 4</u> : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .

1 انظر السؤال 3 أ) من التمرين السابق

2 بوضع : $\begin{cases}d=x\wedge y\\ \Delta=x\vee y\end{cases}$ نستنتج أن : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2$ / $\begin{cases}x=\alpha d\\ y=\beta d\end{cases}$ / $\alpha\wedge\beta=1$ و أن $d\Delta=xy$

منه : $d\Delta=\alpha\beta d^2$ منه : $\Delta=\alpha\beta d$

منه $(x+y)\wedge(x\vee y)=(d\alpha+d\beta)\wedge(\alpha\beta d)=d((\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta)$

و لكون : $\alpha\wedge\beta=1$ و حسب السؤال السابق نستنتج أن : $(\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta=1$

بالتالي : $(x+y)\wedge(x\vee y)=d=x\wedge y$

3 بوضع : $\begin{cases}d=x\wedge y\\ \Delta=x\vee y\end{cases}$ نستنتج أن : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2$ / $\begin{cases}x=\alpha d\\ y=\beta d\end{cases}$ / $\alpha\wedge\beta=1$ و باستعمال النتيجة السابقة

$\begin{cases}x+y=276\\ x\vee y=1440\\ x<y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=276\wedge1440\\ d(\alpha+\beta)=276\\ \alpha\beta d=1440\\ \alpha<\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=12\\ \alpha+\beta=23\\ \alpha\beta=120\\ \alpha\wedge\beta=1\\ \alpha<\beta\end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta)\in\{(8;15)\}$: نستنتج أن

منه : $(x,y)=(96;180)$ ، عكسيا نتحقق بسهولة من أن هذا الزوج يحقق النظمة المقترحة

خلاصة : $S=\{(96;180)\}$

رياضيات النجاح أ. سمير لخريسي
www.naja7math.com