

السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	الأعداد العقدية	سلسلة 1
<p>تمرين 1: اكتب الأعداد العقدية التالية على الشكل الجبري:</p> $z_1 = (5i-1)(i+3) \quad , \quad z_2 = (7i-1)^2 \quad , \quad z_3 = (i+2)^3$ $z_4 = (3-i)^4 \quad , \quad z_5 = \frac{5}{2-i} + \frac{3-i}{2+i} \quad , \quad z_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$		
<p>تمرين 2: حل في C المعادلات:</p> $z+i = -2z+7 \quad , \quad i-z = iz-3 \quad , \quad \frac{3\bar{z}}{z+1} = i \quad , \quad 5z+7\bar{z}+4i-3=0 \quad (\text{ضع } z = x+iy)$		
<p>تمرين 3: نعتبر العددين العقديين: $z_1 = \frac{5+4i}{5-4i} + \frac{5-4i}{5+4i}$ و $z_2 = (1+2i)^3 - (1-2i)^3$</p> <p>1) بدون حساب بين أن: $z_1 \in IR$ و $z_2 \in iIR$</p> <p>2) احسب z_1 و z_2</p>		
<p>تمرين 4: نعتبر العدد العقدي $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$</p> <p>1) تحقق أن: $j^2 + j + 1 = 0$ ثم استنتج أن: $j^3 = 1$</p> <p>2) احسب: j^{11}.</p>		
<p>تمرين 5: المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.</p> <p>نعتبر النقط $A\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $B\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $E(1+i)$ و $F(3+2i)$ و $H(-1+5i)$</p> <p>3) بين أن OAB مثلث متساوي الأضلاع</p> <p>4) بين أن EFH مثلث قائم الزاوية.</p> <p>5) حدد النقطة $K(z_K)$ حيث يكون الرباعي $AKEF$ متوازي أضلاع.</p> <p>6) أوجد $G(z_G)$ مركز ثقل المثلث EFH.</p>		
<p>تمرين 6: المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.</p> <p>نضع $u = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، نعتبر النقط $U(u)$ و $A(1)$ و $B(2+u^2)$ و $C(1+u)$.</p> <p>1) اكتب على الشكل الجبري z_C و z_B</p> <p>2) بين أن $OUCA$ متوازي أضلاع</p> <p>3) بين أن A و B و C نقط مستقيمة.</p> <p>4) حدد $M(z_M)$ نقطة تقاطع (O, \vec{e}_1) و المستقيم (AB)</p> <p>5) حدد $N(z_N)$ نقطة تقاطع (O, \vec{e}_2) و المستقيم (AB)</p>		

سلسلة 1	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية
تمرين 1 :		
$z_3 = (i+2)^3$ $z_3 = i^3 + 3 \times i^2 \times 2 + 3 \times i \times 2^2 + 2^3$ $z_3 = -i - 6 + 12i + 8$ $z_3 = 2 + 11i$	$z_2 = (7i-1)^2$ $z_2 = (7i)^2 - 14i + 1$ $z_2 = 49 - 14i + 1$ $z_2 = -48 - 14i$	$z_1 = (5i-1)(i+3)$ $z_1 = 5i^2 + 5i - i - 3$ $z_1 = -5 + 4i - 3$ $z_1 = -8 + 4i$
$z_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$ $z_6 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^5$ $z_6 = \left(\frac{2}{4} + i - \frac{2}{4}\right)^5$ $z_6 = i^5 = i^2 \times i^2 \times i = i$	$z_5 = \frac{5}{2-i} + \frac{3-i}{2+i}$ $z_5 = \frac{5(2+i) + (3-i)(2-i)}{2^2 - i^2} + \frac{(3-i)(2-i)}{2^2 - i^2}$ $z_5 = \frac{10+5i}{4+1} + \frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}$ $z_5 = \frac{10+5i+6-5i-1}{5} = \frac{15}{5} = 3$	$z_4 = (3-i)^4$ $z_4 = [(3-i)^2]^2$ $z_4 = (9-6i+i^2)^2$ $z_4 = (9-6i-1)^2$ $z_4 = (8-6i)^2$ $z_4 = 64 - 96i + (6i)^2$ $z_4 = 64 - 96i - 36$ $z_4 = 28 - 96i$
<p>في كل الحسابات نطبق القواعد المعروفة في المجموعة IR من نشر و تعميل ومتطابقات و ... مع استعمال المتساوية $i^2 = -1$ دون تحديد قيمة معينة للعدد العقدي i فهو أساس بناء مجموعة الأعداد العقدية.</p>		
تمرين 2 : لنحل في C المعادلات :		
<p>لدينا : $z+i = -2z+7$: منه $z = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}i$</p> <p>$3z = 7-i$: منه $z = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}i$</p> <p>$z+i = -2z+7$: منه $z = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}i$</p> <p>$z+2z = 7-i$</p>		
<p>لدينا : $i-z = iz-3$: منه $z = \frac{3+i}{1+i}$</p> <p>$z = \frac{3-3i+i-i^2}{1+1}$: منه $z = \frac{4-2i}{2}$</p> <p>$z = 2-i$: منه $z = \frac{4-2i}{2}$</p> <p>$z = \frac{3+i}{1+i}$: منه $z = \frac{(3+i)(1-i)}{1^2 - i^2}$</p> <p>$z = \frac{3+i}{1+i}$: منه $z = \frac{(3+i)(1-i)}{1^2 - i^2}$</p> <p>$i-z = iz-3$: منه $z = \frac{3+i}{1+i}$</p> <p>$-z-iz = -3-i$: منه $z = \frac{(3+i)(1-i)}{1^2 - i^2}$</p> <p>$-z(1+i) = -3-i$</p>		
<p>لدينا : $3\bar{z} = i(\bar{z}+1)$: منه $\bar{z} = \frac{i}{3-i}$</p> <p>$3\bar{z} = i\bar{z} + i$: منه $\bar{z} = \frac{i(3+i)}{9+1}$</p> <p>$3\bar{z} - i\bar{z} = i$: منه $\bar{z} = \frac{i(3+i)}{9+1}$</p> <p>$(3-i)\bar{z} = i$: منه $\bar{z} = \frac{i}{3-i}$</p> <p>إذن : $z = \frac{-1}{10} - \frac{3}{10}i$: منه $z = \frac{-1}{10} - \frac{3}{10}i$</p> <p>$\bar{z} = \frac{-1+3i}{10}$: منه $\bar{z} = \frac{-1}{10} + \frac{3}{10}i$</p> <p>$\bar{z} = \frac{-1}{10} + \frac{3}{10}i$: منه $\bar{z} = \frac{i(3+i)}{9+1}$</p>		
<p>بوضع $z = x+iy$ نجد :</p> <p>$5z + 7\bar{z} + 4i - 3 = 0$</p> <p>$5(x+iy) + 7(x-iy) + 4i - 3 = 0$: منه $\begin{cases} 12x = 3 \\ -2y = -4 \end{cases}$: منه $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 2 \end{cases}$</p> <p>$5x + 5iy + 7x - 7iy + 4i - 3 = 0$: منه $\begin{cases} 12x = 3 \\ -2y = -4 \end{cases}$: منه $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 2 \end{cases}$</p> <p>$12x - 2iy = 3 - 4i$</p>		
<p>في المثالين الأولين اتبعنا نفس الطرق المتبعة في حل معادلة من الدرجة الأولى في IR ، في المثال الثالث وجدنا بنفس الطرق مرافق z و</p>		

بعد ذلك حددنا قيمة هذا الأخير (للتذكير مرافق $z = a + ib$ هو $\bar{z} = a - ib$)

أما المثال الأخير فتوجب استعمال طريقة مغايرة لكونه يحتوي على المجهول ومرافقه و تم خلال هذه الطريقة استعمال الخاصية:

$$a + ib = a' + ib' \Rightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

$$z_2 = (1 + 2i)^3 - (1 - 2i)^3 \quad , \quad z_1 = \frac{5 + 4i}{5 - 4i} + \frac{5 - 4i}{5 + 4i} \quad : \text{تمرين 3}$$

$$z_1 \in \mathbb{R} : \text{إذن } \bar{z}_1 = \overline{\left(\frac{5 + 4i}{5 - 4i}\right) + \left(\frac{5 - 4i}{5 + 4i}\right)} = \frac{5 - 4i}{5 + 4i} + \frac{5 + 4i}{5 - 4i} = z_1 : \text{منه } z_1 = \frac{5 + 4i}{5 - 4i} + \frac{5 - 4i}{5 + 4i}$$

$$\bar{z}_2 = \overline{(1 + 2i)^3 - (1 - 2i)^3} = (1 - 2i)^3 - (1 + 2i)^3 = -z_2 : \text{منه } z_2 = (1 + 2i)^3 - (1 - 2i)^3$$

إذن $z_2 \in i\mathbb{R}$

استعملنا الخاصيتين: $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ و $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

$$z_1 = \frac{5 + 4i}{5 - 4i} + \frac{5 - 4i}{5 + 4i} = \frac{(5 + 4i)^2}{25 + 16} + \frac{(5 - 4i)^2}{25 + 16}$$

$$z_1 = \frac{25 + 40i - 16 + 25 - 40i - 16}{41} = \frac{18}{41}$$

$$z_2 = (1 + 2i)^3 - (1 - 2i)^3$$

$$z_2 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (2i) + 3 \times 1 \times (2i)^2 + (2i)^3 - (1^3 - 3 \times 1^2 \times (2i) + 3 \times 1 \times (2i)^2 - (2i)^3)$$

$$z_2 = 1 + 6i - 12 - 8i - [1 - 6i - 12 + 8i]$$

$$z_2 = 1 + 6i - 12 - 8i - 1 + 6i + 12 - 8i$$

$$z_2 = -4i$$

$$j = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad : \text{تمرين 4}$$

$$j^2 + j + 1 = \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} + \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{4} + \frac{-1}{2} + 1 = 0$$

لنستنتج أن: $j^3 = 1$

طريقة 2

طريقة 1

بما أن $j^2 = -j - 1$ ، فإن:

$$j^3 = j j^2 = j(-j - 1)$$

$$j^3 = -j^2 - j = -(-j - 1) - j = j + 1 - j = 1$$

$$j^3 - 1 = (j - 1)(j^2 + j + 1) = (j - 1) \times 0 = 0$$

$$\text{منه: } j^3 = 1$$

$$j^{11} = j^9 \times j^2 = (j^3)^3 \times (-j - 1) = 1 \times (-j - 1) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H(-1 + 5i) \text{ و } F(3 + 2i) \text{ و } E(1 + i) \text{ و } B\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ و } A\left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad : \text{تمرين 5}$$

$$OA = |z_A - z_O| = \left|\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$OB = |z_B - z_O| = \left|\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$AB = |z_B - z_A| = \left| \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| = |1| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

منه: $OA = OB = AB = 1$ بالتالي OAB مثلث متساوي الأضلاع

🌟 للتذكير: $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $MN = |z_N - z_M|$

$$EH = |z_H - z_E|$$

$$EH = |-1 + 5i - (1 + i)|$$

$$EH = |-1 + 5i - 1 - i|$$

$$EH = |-2 + 4i|$$

$$EH = \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$$

$$EH = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$EH^2 = 20$$

$$HF = |z_F - z_H|$$

$$HF = |3 + 2i - (-1 + 5i)|$$

$$HF = |3 + 2i + 1 - 5i| = |4 - 3i|$$

$$HF = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$HF^2 = 25$$

$$EF = |z_F - z_E| = |3 + 2i - (1 + i)|$$

$$EF = |3 + 2i - 1 - i| = |2 + i|$$

$$EF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$EF^2 = 5$$

2

منه: $EF^2 + EH^2 = HF^2$ بالتالي حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية

فالمثلث EFH قائم الزاوية في النقطة E

🌟 استعمال بعض التقنيات التي سبق دراستها يكون مفيدا في حل بعض الوضعيات في الهندسة التحليلية العقديّة.

لنحدد $K(z_K)$ حيث يكون الرباعي $AKEF$ متوازي أضلاع.

لدينا: $AKEF$ متوازي أضلاع يعني: $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{FE}$ منه: $\text{aff}(\overrightarrow{AK}) = \text{aff}(\overrightarrow{FE})$ أي: $z_K - z_A = z_E - z_F$

$$z_K = z_E - z_F + z_A$$

منه: $z_K = 1 + i - (3 + 2i) + \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i - 3 - 2i + \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 + \frac{-1}{2} - i + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-5}{2} + \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} i$

3

🌟 يجب كتابة النتيجة على الشكل الجبري: $a + bi$ لذلك نقوم بالتبسيط وترتيب الحدود ثم التعميل بالعدد i

لدينا $G(z_G)$ مركز ثقل المثلث EFH منه: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$

منه: $z_G - z_O = \frac{1}{3}(z_E - z_O) + \frac{1}{3}(z_F - z_O) + \frac{1}{3}(z_H - z_O)$ (لأن: $z_O = 0$)

بالتالي: $z_G = \frac{1 + i + 3 + 2i - 1 + 5i}{3} = \frac{3 + 8i}{3} = 1 + \frac{8}{3}i$

4

تمرين 6: $u = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $U(u)$ و $A(1)$ ، $B(2 + u^2)$ ، $C(1 + u)$.

$$z_C = 1 + \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z_B = 2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2 + \frac{2}{4} + 2 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} \times i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{4} = 2 - i$$

1

لنبين أن $OUCA$ متوازي أضلاع

لدينا: $\text{aff}(\overrightarrow{OU}) = z_U - z_O = u - 0 = u$ و $\text{aff}(\overrightarrow{AC}) = z_C - z_A = 1 + u - 1 = u$ ، منه: $\text{aff}(\overrightarrow{OU}) = \text{aff}(\overrightarrow{AC})$

2

إذن: $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{AC}$ ، بالتالي: $OUCA$ متوازي أضلاع

لنبين أن A و B و C نقط مستقيمة، لدينا:

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1 - (2 - i)}{1 - (1 + u)} = \frac{1 - 2 + i}{1 - 1 - u} = \frac{-1 + i}{-u} = \frac{1 - i}{u} = \frac{1 - i}{\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1 - i}{\frac{-\sqrt{2}}{2}(1 - i)} = \frac{1 - i}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

3

بالتالي: A و B و C نقط مستقيمة.

	<p>لنحدد نقطة تقاطع (O, \vec{e}_1) والمستقيم (AB)</p> <p>بما أن $M \in (O, \vec{e}_1)$ فإن: $z_M = a / a \in \mathbb{R}$ وبما أن: $M \in (AB)$ فإن A و B و M نقط مستقيمة</p> $\frac{z_A - z_M}{z_A - z_B} = \frac{1 - a}{-1 + i} = \frac{(1 - a)(1 + i)}{(-1 + i)(1 + i)} = \frac{1 - a + (1 - a)i}{-2} = \frac{a - 1}{2} + \frac{a - 1}{2}i$ <p>ولدينا: $\frac{z_A - z_M}{z_A - z_B} \in \mathbb{R}$ منه: $\frac{a - 1}{2} = 0$ إذن: $a = 1$ بالتالي: $M(1)$</p>	4
	<p>لنحدد نقطة تقاطع (O, \vec{e}_2) والمستقيم (AB)</p> <p>بما أن $N \in (O, \vec{e}_2)$ فإن: $z_N = bi / b \in \mathbb{R}$ وبما أن: $N \in (AB)$ فإن A و B و N نقط مستقيمة</p> $\frac{z_A - z_N}{z_A - z_B} = \frac{1 - bi}{-1 + i} = \frac{(1 - bi)(1 + i)}{(-1 + i)(1 + i)} = \frac{1 + i - bi + b}{-2} = \frac{1 + b}{-2} + \frac{1 - b}{-2}i$ <p>ولدينا: $\frac{z_A - z_N}{z_A - z_B} \in \mathbb{R}$ منه: $\frac{1 - b}{-2} = 0$ إذن: $b = 1$ بالتالي: $N(i)$</p>	5

رياضيات النجـاح أذ سمير لخريسي