

قانون التركيب الداخلي

هي: $\mathbb{R} - \{3\}$

4- لنبين أن: $E =]3; +\infty[$ جزء مستقر من $(\mathbb{R}; *)$

نعتبر: $y \in E$

نعتبر الدالة: $f_y(x) = xy - 3(x + y) + 12$

معرفة على $]3; +\infty[$

$$f'_y(x) = y - 3$$

بما أن: $y \in E$ فإن: $f'_y(x) > 0$: $\forall x \in]3; +\infty[$

إذن: f_y تزايدية على $]3; +\infty[$

ومنه: $f_y(x) \geq f_y(3)$ و $\forall x \in E$ و $f_y(3) = 4$

إذن: $\forall x \in E$ $f_y(x) > 3$

ومنه: $\forall (x; y) \in E^2$ $f_y(x) > 3$

يعني: $\forall (x; y) \in E^2$ $x * y \in E$

إذن: $E =]3; +\infty[$ جزء مستقر من $(\mathbb{R}; *)$

5- لنبين أن: جميع عناصر $\mathbb{R} - \{3\}$ منتظمة بالنسبة للقانون *

العنصر a من $\mathbb{R} - \{3\}$ منتظم يعني

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

بما أن * تبادلي يكفي البرهنة أن:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

$$a * x = a * y \Leftrightarrow ax - 3(a + x) + 12 = ay - 3(a + y) + 12$$

$$\Leftrightarrow ax - 3x = ay - 3y$$

$$\Leftrightarrow (a - 3)(x - y) = 0 ; a \neq 3$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

ومنه: جميع عناصر $\mathbb{R} - \{3\}$ منتظمة بالنسبة للقانون *

تمرين 2

1- بين أن: الضرب في $M_2(\mathbb{R})$ تجميعي

2- بين أن: الضرب في $M_2(\mathbb{R})$ غير تبادلي

3- بين أن: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد في $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

4- بين أن: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ لا يقبل ماثلا في $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

5- بين أن: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ غير منتظم في $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

الحل

2- لنبين أن: الضرب في $M_2(\mathbb{R})$ غير تبادلي

لدينا:

تمرين 1

نعتبر قانون التركيب الداخلي * المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad x * y = xy - 3(x + y) + 12$$

1- بين أن: * تجميعي و تبادلي

2- بين أن * يقبل عنصرا محايدا ثم حدده

3- حدد عناصر \mathbb{R} التي تقبل ماثلا بالنسبة للقانون *

4- بين أن: $E =]3; +\infty[$ جزء مستقر من $(\mathbb{R}; *)$

5- بين أن: جميع عناصر $\mathbb{R} - \{3\}$ منتظمة بالنسبة للقانون *

الحل

1- لنبين أن: * تجميعي

نعتبر: $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x * y) * z = (xy - 3(x + y) + 12)z - 3((xy - 3(x + y) + 12) + z) + 12$$

$$(x * y) * z = xyz - 3(xz + yz + xy) + 9(x + y + z) - 24$$

$$\boxed{(x * y) * z = x * (y * z)}$$

إذن:

ومنه: * تجميعي

- لنبين أن: * تبادلي

نعتبر: $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$x * y = xy - 3(x + y) + 12$$

لدينا:

$$= yx - 3(y + x) + 12$$

$$\boxed{x * y = y * x}$$

إذن:

2- لنبين أن * يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر: $e \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x * e = e * x = x$$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد e بحيث: $x * e = x$

$$x * e = x \Leftrightarrow xe - 3(x + e) + 12 = x$$

$$\Leftrightarrow (e - 4)(x - 3) = 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e = 4}$$

إذن: * يقبل عنصرا محايدا وهو 4

3- عناصر \mathbb{R} التي تقبل ماثلا بالنسبة للقانون *

نعتبر: $x \in \mathbb{R}$

y ماثلا ل x يعني: $x * y = y * x = 4$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد y بحيث: $x * y = 4$

$$x * y = 4 \Leftrightarrow xy - 3(x + y) + 12 = 4$$

$$\Leftrightarrow y(x - 3) = 3x - 9$$

$$\boxed{x * y = e \Leftrightarrow y = \frac{3x - 9}{x - 3} ; x \neq 3}$$

* مجموعة عناصر \mathbb{R} التي تقبل ماثلا بالنسبة للقانون *

$$-4 \text{ بين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ لا يقبل مماثلا في } (\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$$

$$-5 \text{ بين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ غير منتظم في } (\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$$

تمرين 4

بين أن f تشاكل في كل حالة

$$-1 \quad f : (]0; +\infty[; \times) \rightarrow (\mathbb{R}; +)$$

$$x \mapsto \ln x$$

$$-2 \quad f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{C}^*; \times)$$

$$x \mapsto e^{ix}$$

$$-3 \quad f : (\mathcal{P}(E); \cup) \rightarrow (\mathcal{P}(E); \cap)$$

$$X \mapsto C_E^X$$

$$-4 \quad f : (\mathcal{P}(E); \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(E); \cup)$$

$$X \mapsto C_E^X$$

$$-5 \quad f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n \text{ احسب :}$$

الحل

$$-1 \quad f : (]0; +\infty[; \times) \rightarrow (\mathbb{R}; +)$$

$$x \mapsto \ln x$$

$$\text{نعتبر : } (x; y) \in]0; +\infty[^2$$

$$f(xy) = \ln(xy)$$

$$= \ln x + \ln y$$

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

إذن : f تشاكل من $(]0; +\infty[; \times)$ نحو $(\mathbb{R}; +)$

$$-3 \quad f : (\mathcal{P}(E); \cup) \rightarrow (\mathcal{P}(E); \cap)$$

$$X \mapsto C_E^X$$

$$\text{نعتبر : } (X; Y) \in \mathcal{P}(E)^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ غير تبادلي

$$-3 \text{ لنبين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ هو العنصر المحايد في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$\text{لدينا : } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\text{و : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\text{إذن : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ هو العنصر المحايد في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$-4 \text{ لنبين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ لا يقبل مماثلا في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases}; \begin{cases} c+d=1 \\ c+d=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1=0$$

و هذا غير ممكن

$$\text{إذن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ لا يقبل مماثلا في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$-5 \text{ لنبين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ غير منتظم في } (\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$\text{لدينا : } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{لكن : } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

تمرين 3

-1 بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ تجميعي

-2 بين أن : الضرب في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ غير تبادلي

$$-3 \text{ بين أن : } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ هو العنصر المحايد في } (\mathbb{M}_3(\mathbb{R}); \times)$$

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

إذن : f تشاكل من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

من : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

نبين بالترجع أن : $f(nx) = (f(x))^n$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

تمرين 5

* قانون تركيب داخلي في G بحيث :

* تجميعي ، يقبل عنصرا محايدا e ، جميع عناصر G تقبل مماثلا في $(G; *)$ (مماثل a هو a^{-1})

$$f : G \rightarrow \mathcal{F}$$

نعتبر التطبيق :

$$a \mapsto f_a$$

$$f_a : G \rightarrow G$$

f_a معرف بما يلي :

$$x \mapsto a * x * a^{-1}$$

1- بين أن : $\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}$

2- نعتبر : $F = \{f_a / a \in G\}$

أ - بين أن : \circ قانون تركيب داخلي في F تجميعي ، يقبل

عنصرا محايدا ، جميع عناصر F تقبل مماثلا في $(F; \circ)$

ب- بين أن : f تشاكل من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

الحل

1- لنبين أن : $\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}$

نعتبر : $x \in G$

$$f_a \circ f_b(x) = a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1}$$

بما أن : * تجميعي و $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

$$a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1} = (a*b) * x * (a*b)^{-1}$$

$$\forall x \in G \quad f_a \circ f_b(x) = f_{a*b}(x) \quad \text{إذن :}$$

$$\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b} \quad \text{و منه :}$$

2- نعتبر : $F = \{f_a / a \in G\}$

أ - لنبين أن : \circ قانون تركيب داخلي في F

من 1- : $\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}$

وبما أن : * قانون تركيب داخلي في G

$$f(X \cup Y) = C_E^{X \cup Y}$$

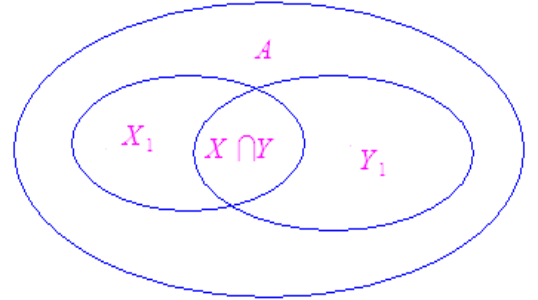
$$= E - (X \cup Y)$$

$$= (E - X) \cap (E - Y)$$

$$= C_E^X \cap C_E^Y$$

$$f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y)$$

إذن : f تشاكل من $(\mathcal{P}(E); \cup)$ نحو $(\mathcal{P}(E); \cap)$



$$E - (X \cup Y) = A$$

$$E - X = A \cup Y_1$$

$$E - Y = A \cup X_1$$

$$(A \cup Y_1) \cap (A \cup X_1) = A$$

$$E - (X \cup Y) = (E - X) \cap (E - Y) \quad \text{إذن :}$$

$$f : (\mathcal{P}(E); \cap) \rightarrow (\mathcal{P}(E); \cup) \quad -4$$

$$X \mapsto C_E^X$$

نعتبر : $(X; Y) \in \mathcal{P}(E)^2$

$$f(X \cap Y) = C_E^{X \cap Y}$$

$$= E - (X \cap Y)$$

$$= (E - X) \cup (E - Y)$$

$$= C_E^X \cup C_E^Y$$

$$f(X \cap Y) = f(X) \cup f(Y)$$

إذن : f تشاكل من $(\mathcal{P}(E); \cap)$ نحو $(\mathcal{P}(E); \cup)$

$$f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (M_2(\mathbb{R}); \times)$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad -5$$

نعتبر : $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

3- استنتاج خاصيات $(E; \times)$

الحل

1- لنبين أن f تقابل

$$\text{نعتبر: } \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow a+ib = c+id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

إذن f تبين (a)

نعتبر: $c+id \in \mathbb{C}^*$

$$\text{لنحدد: } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in E \text{ بحيث: } c+id = f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right)$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c+id \Leftrightarrow a+ib = c+id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c+id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

إذن f شمولي (b)

من: (a) و (b) : f تقابل

2- بين أن f تشاكل من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix} \right)$$

$$= (ac-bd) + i(bc+ad)$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = (a+bi)(c+di)$$

إذن f تشاكل من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

3- استنتاج خاصيات $(E; \times)$

بما أن f تشاكل تقابلي من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن f^{-1} تشاكل $(\mathbb{C}^*; \times)$ من نحو $(E; \times)$

و بما أن \times قانون تركيب داخلي في \mathbb{C}^*

\times تجميعي تبادلي، يقبل عنصرا محايدا 1، جميع عناصر \mathbb{C}^*

تقبل مماثلا في $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن: $a*b \in G$

إذن: $f_{a*b} \in F$

ومنه: $f_a \circ f_b \in F$

إذن: \circ قانون تركيب داخلي في F

– لنبين أن: \circ تجميعي

نعتبر: $(a;b;c) \in G^3$

بما أن: $*$ قانون تركيب داخلي في G

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

$$(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_{a*b} \circ f_c$$

$$= f_{(a*b)*c}$$

$$= f_{a*(b*c)}$$

$$= f_a \circ f_{(b*c)}$$

$$(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_a \circ (f_b \circ f_c)$$

إذن: \circ تجميعي في F

– لنبين أن: \circ يقبل عنصرا محايدا

نعتبر: $a \in G$

لدينا: $f_e \circ f_a = f_{e*a} = f_a$ و $f_a \circ f_e = f_{a*e} = f_a$

إذن: \circ يقبل عنصرا محايدا و هو f_e

– لنبين أن: جميع عناصر F تقبل مماثلا في $(F; \circ)$

نعتبر: $a \in G$ و $a^{-1} \in G$ مماثل a

لدينا: $f_{a^{-1}} \circ f_a = f_{a^{-1}*a} = f_e$ و $f_a \circ f_{a^{-1}} = f_{a*a^{-1}} = f_e$

إذن: مماثل f_a هو $f_{a^{-1}}$

ومنه: جميع عناصر F تقبل مماثلا في $(F; \circ)$

ب- بين أن: f تشاكل من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

نعتبر: $(a;b) \in G^2$

لدينا: $f(a*b) = f_{a*b}$

إذن: $f(a*b) = f_a \circ f_b$

إذن: f تشاكل من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

تمرين 6

نعتبر:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / (a;b) \in \mathbb{R}^2; (a;b) \neq (0;0) \right\}$$

$$f: E \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a+ib$$

نعتبر التطبيق:

1- بين أن: f تقابل

2- بين أن: f تشاكل من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

(مماثل $a+ib$ هو $\frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$)

فإن \times قانون تركيب داخلي في E

\times تجميعي تبادلي ، يقبل عنصرا محايدا $f^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ،

جميع عناصر E تقبل مماثلا في $(E; \times)$

(مماثل $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ هو $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$)

$$f'_y(x) = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$$

بما أن : $y \in]-1;1[$ فإن : $f'_y(x) > 0$: $\forall x \in]-1;1[$
 إذن : f_y تزايدية على $]-1;1[$

$$f_y(]-1;1[) =]-1;1[$$

و منه : $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad f_y(x) \in E$

$$\forall (x;y) \in E^2 \quad x * y \in E$$

إذن : * قانون تركيب داخلي في E

2- لنبين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

أ- لنبين أن : * تجميعي

نعتبر : $(x;y;z) \in E^3$

$$\begin{aligned} (x*y)*z &= \frac{x+y}{1+xy} * z \\ &= \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} * z} \end{aligned}$$

$$(x*y)*z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$x*(y*z) = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz} \quad \text{كذلك :}$$

$$(x*y)*z = x*(y*z) \quad \text{إذن :}$$

و منه : * تجميعي

ب- لنبين أن : * تبادلي

نعتبر : $(x;y) \in E^2$

$$\begin{aligned} x*y &= \frac{x+y}{1+xy} \\ &= \frac{y+x}{1+yx} \end{aligned} \quad \text{لدينا :}$$

$$x*y = y*x \quad \text{إذن :}$$

و منه : * تبادلي

ج- لبين أن * يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر : $e \in E$ بحيث :

بحيث : $\forall x \in E \quad x*e = e*x = x$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد e بحيث : $x*e = x$

الزمرة - الحلقة - الجسم

تمرين 1

نعتبر : $E =]-1;1[$

ليكن : $(x;y) \in E^2$

نضع : $x*y = \frac{x+y}{1+xy}$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

الحل

1- لنبين أن : * قانون تركيب داخلي في E

نعتبر : $y \in E$

نعتبر الدالة : $f_y(x) = \frac{x+y}{1+xy}$ معرفة على $E =]-1;1[$

إذن : $(1;0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة * في E

مماثل $(x;y)$

أ- $x \neq 0$

$$(xx' + yy'; xy' + yx') = (1;0)$$

$$\begin{cases} xx' + yy' = 1 \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2x' + xyy' = x \\ xyy' + y^2x' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(x^2 - y^2) = x \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ xy' + yx' = 0 \end{cases} \quad x \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

مماثل $(x;y)$ هو $(x;-y)$

ب- الحالة : $x = 0$: إذن : $y = 1$ أو $y = -1$

$$(xx' + yy'; xy' + yx') = (1;0)$$

$$\begin{cases} yy' = 1 \\ yx' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ x' = 0 \end{cases} \quad y \neq 0$$

مماثل $(0;1)$ هو $(0;1)$ و مماثل $(0;-1)$ هو $(0;-1)$

تمرين 3

زمرة غير تبادلية (العنصر المحايد هو e)

(مماثل a هو a^{-1})

نعتبر : $C = \{a \in G / \forall x \in G \quad xa = ax\}$

بين أن : $(C; \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G; \times)$

الحل

لنبين أن : $\forall (a;b) \in C \quad ab^{-1} \in C$

نعتبر : $x \in G$

$$ab^{-1}x = a(x^{-1}b)^{-1}$$

$$b \in C \Rightarrow x^{-1}b = bx^{-1}$$

$$ab^{-1}x = a(bx^{-1})^{-1} = axb^{-1}$$

$$a \in C \Rightarrow ax = xa$$

$$\forall (a;b) \in C \quad \forall x \in G \quad ab^{-1}x = xab^{-1}$$

$$\boxed{\forall (a;b) \in C \quad ab^{-1} \in C} \quad \text{إذن :}$$

ومنه : $(C; \times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G; \times)$

لدينا : $1_G \in C$ لأن $\forall x \in G \quad x1_G = 1_Gx$

إذن : $C \neq \emptyset$

$$x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x$$

$$\Leftrightarrow x+e = x+x^2e; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e = x^2e$$

$$\Leftrightarrow e(1-x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow e(1-x^2) = 0; \forall x \in E$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e=0}$$

إذن : * يقبل عنصرا محايدا و هو 0

د- لنبين أن جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E
نعتبر : $x \in E$

y مماثل ل x يعني : $x * y = y * x = 0$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد y بحيث : $x * y = 0$

$$x * y = 0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -x$$

بما أن : $-x \in E$

إذن : جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E

إذن : من - أ - ب - ج - د - $(E; *)$ زمرة تبادلية

تمرين 2

نعتبر : $E = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\}$

ليكن : $(x;y) \in E^2$ و $(x';y') \in E^2$

نضع : $(x;y) * (x';y') = (xx' + yy'; xy' + yx')$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E; *)$ زمرة تبادلية

الحل

1- * قانون تركيب داخلي في E (الحساب)

2- التجميعية و التبادلية évident

العنصر المحايد :

$$(x;y) * (e_x; e_y) = (xe_x + ye_y; xe_y + ye_x) = (x;y)$$

$$\begin{cases} xe_x + ye_y = x \\ xe_y + ye_x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2e_x + xye_y = x^2 \\ xye_y + y^2e_x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_x(x^2 - y^2) = x^2 - y^2 \\ xe_x + ye_y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_x = 1 \\ x + ye_y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_x = 1 \\ e_y = 0 \end{cases}$$

تمرين 4

$a \in G$ زمرة $(G; \times)$

نعتبر: $H_a = \{x \in G / xa = ax\}$

بين أن: زمرة جزئية للزمرة $(G; \times)$ $(H_a; \times)$

الحل

لنبين أن: $\forall (x; y) \in H_a^2 \quad xy^{-1} \in H_a$

$$x \in H_a \Leftrightarrow xa = ax \Leftrightarrow a^{-1}x = xa^{-1}$$

$$y \in H_a \Leftrightarrow ya = ay \Leftrightarrow a^{-1}y = ya^{-1}$$

$$xy^{-1}a = x(a^{-1}y)^{-1} = x(ya^{-1})^{-1} = xay^{-1} = axy^{-1}$$

إذن: $\forall (x; y) \in H_a^2 \quad xy^{-1}a = axy^{-1}$

ومنه: $\forall (x; y) \in H_a^2 \quad xy^{-1} \in H_a$

إذن: زمرة جزئية للزمرة $(G; \times)$ $(H_a; \times)$

تمرين 5

نعتبر:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$$

نعتبر التطبيق:

$$f : (\mathbb{R}; +) \rightarrow (E; \times)$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

1- بين أن: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- بين أن: f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

3- استنتج بنية المجموعة $(E; \times)$

$$4- \text{ نعتبر: } M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

احسب: M^2 ; M^3 ; ثم استنتج M^n

الحل

1- لنبين أن: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

$$\text{نعتبر: } \left(\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \right) \in E^2$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} \in E$$

و

$$\forall \left(\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \right) \in E^2 \text{ : إذن}$$

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \in E$$

و منه: E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- لنبين أن: f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

نعتبر: $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x+y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & -\cos x \sin y - \sin x \cos y \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

إذن: f تشاكل من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

$$\forall \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \in E \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

3- استنتج بنية المجموعة $(E; \times)$

بما أن: f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}; +)$ نحو $(E; \times)$

و زمرة تبادلية $(\mathbb{R}; +)$

فإن: $(E; \times)$ زمرة تبادلية

$$4- \text{ نعتبر: } M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

حساب: M^2 ; M^3 ; ثم استنتج M^n

من: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

نبين بالترجع أن: $f(nx) = (f(x))^n$

$$\left(\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \right)^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix} \text{ : إذن}$$

تمرين 6

نعتبر:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{R}^2; (a; b) \neq (0; 0) \right\}$$

إذن : شمولي f (b)

من : (a) و (b) : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = f \begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix} \\ = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = (a + bi)(c + di)$$

إذن : f تشاكل من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

4- استنتاج بنية المجموعة $(E; \times)$

بما أن : f تشاكل تقابلي من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن : f^{-1} تشاكل $(\mathbb{C}^*; \times)$ من نحو $(E; \times)$

و بما أن : زمرة $(\mathbb{C}^*; \times)$

فإن : زمرة $(E; \times)$

ملاحظة

(مماثل $a + ib$ في $(\mathbb{C}^*; \times)$ هو $\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$)

(مماثل $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $(E; \times)$ هو $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ -\frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$)

العنصر المحايد في $(\mathbb{C}^*; \times)$ هو 1

العنصر المحايد في $(E; \times)$ هو $f^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

تمرين 7

($G; *$) زمرة العنصر المحايد هو e (مماثل a هو a^{-1})

$f_a : G \rightarrow G$

التطبيق f_a معرف بما يلي : $x \mapsto a * x * a^{-1}$

نعتبر : $F = \{f_a / a \in G\}$

$f : G \rightarrow F$

نعتبر التطبيق : $a \mapsto f_a$

1- بين أن $(F; \circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F}; \circ)$

2- بين أن : f تشاكل شمولي من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(F; \circ)$

الحل

$f : E \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + ib$$

نعتبر التطبيق :

1- بين أن : E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- بين أن : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E; \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*; \times)$

4- استنتاج بنية المجموعة $(E; \times)$

الحل

1- لنبين أن : E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ac - bd & -(bc + ad) \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix} \in E \quad \text{و}$$

$$\forall \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \in E$$

ومنه : E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

2- لنبين أن : f تقابل

$$\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \in E^2$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow a + ib = c + id \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = f \left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

إذن : f تباين (a)

نعتبر : $c + id \in \mathbb{C}^*$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c + id \quad \text{بحيث} \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in E$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c + id \Leftrightarrow a + ib = c + id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$f \left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right) = c + id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

1- لنبين أن : $(F; \circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F}; \circ)$

يعني : $\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b \in F$
 نعتبر : $x \in G$

$$f_a \circ f_b (x) = a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1}$$

بما أن : * تجميعي و $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

$$f_a * (b * x * b^{-1}) * a^{-1} = (a * b) * x * (a * b)^{-1}$$

إذن : $\forall x \in G \quad f_a \circ f_b (x) = f_{a*b} (x)$

$$\boxed{\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b = f_{a*b}}$$

وبما أن : * قانون تركيب داخلي في G

فإن : $a * b \in G$

إذن : $f_{a*b} \in F$

ومنه : $f_a \circ f_b \in F$

إذن : $\forall (a; b) \in G^2 \quad f_a \circ f_b \in F$

ومنه : $(F; \circ)$ جزء مستقر من $(\mathcal{F}; \circ)$

2- لنبين أن : f تشاكل من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

نعتبر : $(a; b) \in G^2$

لدينا : $f(a * b) = f_{a*b}$

إذن : $f(a * b) = f_a \circ f_b$

إذن : f تشاكل من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$ (a)

- لنبين أن : f شمولي

لدينا : $\forall f \in F \quad \exists a \in E \quad f(a) = f_a$

إذن : f شمولي (b)

ومن : (a) و (b)

f تشاكل شمولي من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(F; \circ)$

بما أن : f تشاكل شمولي من $(G; *)$ نحو $(F; \circ)$

و $(G; *)$ زمرة

فإن : $(F; \circ)$ زمرة

ملاحظة

العنصر المحايد في $(G; *)$ هو e

العنصر المحايد في $(F; \circ)$ هو f_e $f(e) = f_e$

مماثل a في $(G; *)$ هو a^{-1}

مماثل f_a في $(F; \circ)$ هو $f_{a^{-1}}$ $f(a^{-1}) = f_{a^{-1}}$

تمرين 8

بين أن : $(\mathbb{Z}^2; +; \times)$ حلقة تبادلية واحدة

بحيث : $\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$ و $\forall (x'; y') \in \mathbb{Z}^2$

$$(x; y) + (x'; y') = (x + x'; y + y')$$

$$(x; y) \times (x'; y') = (xx' + 2yy'; xy' + yx')$$

الحل

أ- $(\mathbb{Z}^2; +)$ زمرة تبادلية (واضح)

صفر $(\mathbb{Z}^2; +)$ هو $(0; 0)$ مماثل $(x; y)$ هو $(-x; -y)$ في

$(\mathbb{Z}^2; +)$

ب- \times تجميعي في \mathbb{Z}^2 (الحساب)

ج- \times تبادلي في \mathbb{Z}^2 (الحساب)

د- وحدة $(\mathbb{Z}^2; \times)$ هي $(1; 0)$

هـ- القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في \mathbb{Z}^2

بما أن \times تبادلي في \mathbb{Z}^2

نكتفي بالبرهنة أن :

$$\forall (x''; y'') \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (x'; y') \in \mathbb{Z}^2 \quad \forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2$$

$$(x; y) \times ((x'; y') + (x''; y'')) = ((x; y) \times (x'; y')) + ((x; y) \times (x''; y''))$$

(كذلك الحساب)

من (أ- ب- ج- د- هـ) $(\mathbb{Z}^2; +; \times)$ حلقة تبادلية واحدة

تمرين 9

1- بين أن : $1 + j + j^2 = 0$ بحيث : $j = e^{2i\pi/3}$

2- نعتبر : $E = \{z \in \mathbb{C} / \exists (a; b) \in \mathbb{R}^2 : z = a + bj\}$

بين أن : $(E; +; \times)$ حلقة تبادلية واحدة

الحل

أ- $(E; +)$ زمرة تبادلية (واضح)

طريقة البرهنة أن : $(E; +)$ زمرة تبادلية

نبين أن : $(E; +)$ زمرة تبادلية مباشرة

أو من الأحسن نبين أن : $(E; +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}; +)$

و بما أن : $(\mathbb{C}; +)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E; +)$ زمرة تبادلية

ب- \times قانون تركيب داخلي في E (الحساب و العلاقة

$$(1 + j + j^2 = 0)$$

بما أن $(\mathbb{C}; +; \times)$ جسم تبادلي و $E \subset \mathbb{C}$ و \times قانون تركيب

داخلي في E

فإن : ج- \times تجميعي في E (الحساب)

د- \times تبادلي في E (الحساب)

ج- وحدة $(E; \times)$ هي 1

هـ- القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E

من (أ-ب-ج-د-هـ) حلقة تبادلية واحدة $(E; +; \times)$

تمرين 10

بين أن $(\mathbb{R}; *, T)$ جسم تبادلي

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x * y = x + y - 1 \\ x T y = x + y - xy \end{cases}$$

الحل

أ- $(\mathbb{R}; *)$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R}; *)$ هو 1

ب- $(\mathbb{R} - \{1\}; T)$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R}; T)$ هو 0

ج- القانون T توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في \mathbb{R} (الحساب)
بما أن T تبادلي في \mathbb{R}
نكتفي بالبرهنة أن:

$$\forall (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \quad x T (y * z) = (x T y) * (x T z)$$

من (أ-ب-ج) $(\mathbb{R}; *, T)$ جسم تبادلي

تمرين 11

نعتبر:

$$\mathbb{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} / (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

بين أن $(\mathbb{K}; +; \times)$ جسم تبادلي

الحل

1- $(\mathbb{K}; +)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

- بما أن $(M_2(\mathbb{R}); +)$ زمرة تبادلية و $\mathbb{K} \subset M_2(\mathbb{R})$

يكفي ان نبين أن $(\mathbb{K}; +)$ زمرة جزئية من $(M_2(\mathbb{R}); +)$

ومنه $(\mathbb{K}; +)$ زمرة تبادلية

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})} \text{ هو } (\mathbb{K}; +) \text{ العنصر المحايد في}$$

2- $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}; \times)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

أ- \times قانون تركيب داخلي في \mathbb{K} (الحساب)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa-5yb & xb+ya+2yb \\ -5(xb+ya+2yb) & (xa-5yb)+2(xb+ya+2yb) \end{pmatrix}$$

ب- \times تبادلي في $\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$ (الحساب)

- بما أن $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$ حلقة واحدة و $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ و \times قانون

تركيب داخلي في \mathbb{K}

ج- \times تجميعي في $\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$

د- وحدة $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}; \times)$ هي $1_{M_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

هـ- لنبين أن جميع عناصر $\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$ تقبل ماثلا في

$$\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$$

بما أن \times تبادلي في $\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} \in \mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\} \text{ نكتفي بتحديد:}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ بحيث:}$$

$$\begin{cases} xa-5yb=1 \\ xb+ya+2yb=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax-5by=1 \\ bx+(a+2b)y=0 \end{cases} \text{ نجد:}$$

$$5b^2 + 2ab + a^2 \neq 0$$

لأن: $\Delta'_a = -4b^2 < 0$ و $\Delta'_b = -4a^2 < 0$

$$\begin{cases} x = \frac{a+2b}{5b^2 + 2ab + a^2} \\ y = \frac{-b}{5b^2 + 2ab + a^2} \end{cases} \text{ حل النظمة نجد:}$$

من (أ-ب-ج-د-هـ) $(\mathbb{K} - \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}; \times)$ زمرة تبادلية

3- القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في \mathbb{K}

بما أن $(M_2(\mathbb{R}); +; \times)$ حلقة واحدة و $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ و \times قانون

تركيب داخلي في \mathbb{K} فإن القانون \times توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في \mathbb{K}

من (1-2-3) $(\mathbb{K}; +; \times)$ جسم تبادلي

تمرين 12 (الإستدراكية 2003)

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix} / (a; b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ نعتبر:}$$

$$E = \{M_{(a,b)} / a^2 - 2b^2 = 1\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

1- تحقق أن $A \in E$

2- بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

و أن قانون التركيب الداخلي \times تبادلي في E

3- بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي \times

4- بين أن $(E; \times)$ زمرة تبادلية

الفضاءات المتجهية الحقيقية

تمرين 1

I مجموعة الدوال العددية الفردية المعرفة على \mathbb{R}
 P مجموعة الدوال العددية الزوجية المعرفة على \mathbb{R}

1- بين أن $(I; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2- بين أن $(P; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

الحل

1- لنبين أن $(I; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

الطريقة 1 (تعريف فضاء متجهي حقيقي)

أ- نبين أن $(I; +)$ زمرة تبادلية

لنبين أن $(I; +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +)$

نعتبر $(u; v) \in I^2$ ونبين أن $u - v \in I$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$(u - v)(-x) = u(-x) - v(-x)$$

$$= -u(x) + v(x)$$

$$= -(u(x) - v(x))$$

$$\boxed{(u - v)(-x) = -(u - v)(x)}$$

إذن: $\forall (u; v) \in I^2 \quad u - v \in I$

إذن: $(I; +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +)$

و بم أن $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +)$ زمرة تبادلية

فإن $(I; +)$ زمرة تبادلية

ب- نعتبر: $(u; v) \in I^2$ و $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

1- نبين أن $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$$(\alpha + \beta)u(x) = \alpha u(x) + \beta u(x)$$

$$(\alpha + \beta)u(x) = (\alpha u + \beta u)(x)$$

إذن: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

2- نبين أن $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

$$(\alpha\beta)u(x) = \alpha(\beta u(x))$$

$$(\alpha\beta)u(x) = \alpha(\beta u)(x)$$

إذن: $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

3- نبين أن $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

$$4- \text{ نبين أن } lu = u$$

استنتاج

من أ- و ب- : $(I; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

الطريقة 2 (الفضاء المتجهي الجزئي)

نبين أن $(I; +; \bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

$$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \bullet)$$

(1) $I \neq \emptyset$ لأن $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in I$

نعتبر: $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $(u; v) \in I^2$

و نبين أن $(\alpha u + \beta v) \in I$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$(\alpha u + \beta v)(-x) = \alpha u(-x) + \beta v(-x)$$

$$= -\alpha u(x) - \beta v(x)$$

$$(\alpha u + \beta v)(-x) = -(\alpha u + \beta v)(x)$$

إذن:

$$(2) (\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) (\forall (u; v) \in I^2) : (\alpha u + \beta v) \in I$$

و من (1) و (2): $(I; +; \bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء

المتجهي

$$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \bullet)$$

و بالتالي: $(I; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2- نبين أن $(P; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن $(P; +; \bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

$$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \bullet)$$

(1) $P \neq \emptyset$ لأن $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in P$

نعتبر: $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $(u; v) \in P^2$

و نبين أن $(\alpha u + \beta v) \in P$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$(\alpha u + \beta v)(-x) = \alpha u(-x) + \beta v(-x)$$

$$= \alpha u(x) + \beta v(x)$$

$$(\alpha u + \beta v)(-x) = (\alpha u + \beta v)(x)$$

إذن:

$$(2) (\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) (\forall (u; v) \in P^2) : (\alpha u + \beta v) \in P$$

و من (1) و (2): $(P; +; \bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء

المتجهي

$$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \bullet)$$

و بالتالي: $(P; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

تمرين 2

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}); +; \bullet)$

اكتب: $M = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$ كتأليفة خطية ل

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل

بين أن : $B = (1; \cos^2 x; \cos 2x)$ أسرة مقيدة

الحل

لدينا : $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$
إذن : B أسرة مقيدة

تمرين 6

1- في الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

بين أن : $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

أساس في $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ ثم استنتج بُعد $M_2(\mathbb{R})$

2- في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

بين أن : $B = ((1;0);(0;1))$ أساس في $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$
ثم استنتج بُعد \mathbb{R}^2

3- في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{P}_2; +; \cdot)$

بين أن : $B = (1; x; x^2)$ أساس في $(\mathcal{P}_2; +; \cdot)$
ثم استنتج بُعد \mathcal{P}_2

الحل

1- أ - نبين أن : B أسرة مولدة لـ $M_2(\mathbb{R})$

نعتبر : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : B أسرة مولدة لـ $M_2(\mathbb{R})$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ثم نبين أن : $a = b = c = d = 0$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه : $a = b = c = d = 0$

إذن : B أسرة حرة

ومن أ-ب : B أساس للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

إذن : $\dim M_2(\mathbb{R}) = \text{card} B$

$$\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$$

2- أ - نبين أن : B أسرة مولدة لـ \mathbb{R}^2

نعتبر : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : $M = 2M_1 - 5M_2$

تمرين 3

بين أن : $((2;3);(-1;5))$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي

$(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

الحل

لنبين أن : $((2;3);(-1;5))$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي

$(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

نعتبر : $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x; y) = \alpha(2;3) + \beta(-1;5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = x \\ -1\alpha + 5\beta = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5x - 3y}{13} \\ \beta = \frac{x + 2y}{13} \end{cases}$$

إذن :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 : (x; y) = \alpha(2;3) + \beta(-1;5)$$

$$\text{بحيث : } \alpha = \frac{5x - 3y}{13}; \beta = \frac{x + 2y}{13}$$

ومنه : $((2;3);(-1;5))$ أسرة مولدة لـ $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

تمرين 4

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

بين أن : $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ أسرة حرة

الحل

نعتبر : $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ثم نبين أن : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha + \gamma \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

B أسرة حرة

تمرين 5

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +; \cdot)$

$$(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') = \alpha(x + y) + \beta(x' + y')$$

$$(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') = 0$$

إذن :

$$(2) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (x, y); (x', y') \in F^2 : \alpha(x, y) + \beta(x', y') \in F$$

ومنه (1) و (2) :

F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

ومنه : F فضاء متجهي حقيقي

2- حدد أساس ل F ثم استنتج بُعده

نعتبر : $(x, y) \in F$ إذن : $y = -x$

ومنه : $(x, y) = (x, -x)$

$$(x, y) = x(1, -1)$$

إذن : $B = ((1, -1))$ أسرة مولدة ل F

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $a \in \mathbb{R}$ بحيث : $a(1, -1) = (0, 0)$

ثم نبين أن : $a = 0$

لدينا : $a(1, -1) = (0, 0)$ إذن : $a(1, -1) = (0, 0)$

ومنه : $a = 0$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : $B = ((1, -1))$ أسرة مولدة ل F و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي F

إذن : $\dim F = \text{card} B$

$$\dim F = 2$$

تمرين 8

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -3x + y - 2z = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + y + z = 0\}$$

1- أ- بين أن : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساس ل E ثم استنتج بُعده

2- أ- بين أن : $(F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساس ل F ثم استنتج بُعده

3- أ- بين أن : $(E \cap F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساس ل $E \cap F$ ثم استنتج بُعده

الحل

1- أ- لنبين أن : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3; +; \cdot)$

(1) $E \neq \emptyset$ لأن : $(0, 0, 0) \in E$

نعتبر : $((x, y, z); (x', y', z')) \in E^2$ و $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

نبين : $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') \in E$

$$(a; b) = a(1; 0) + b(0; 1)$$

إذن : B أسرة مولدة ل \mathbb{R}^2

ب- نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

بحيث : $a(1; 0) + b(0; 1) = (0; 0)$

ثم نبين أن : $a = b = 0$

لدينا : $a(1; 0) + b(0; 1) = (0; 0)$

إذن : $(a; b) = (0; 0)$

ومنه : $a = b = 0$

إذن : B أسرة حرة

ومن أ- ب : B أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

إذن : $\dim \mathbb{R}^2 = \text{card} B$

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$

2- أ- نبين أن : B أسرة مولدة ل \mathcal{S}_2

نعتبر : $(ax^2 + bx + c) \in \mathcal{S}_2$

$$ax^2 + bx + c = a(x^2) + b(x) + c(1)$$

إذن : B أسرة مولدة ل \mathcal{S}_2

ب- نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$

بحيث : $ax^2 + bx + c = 0$

ثم نبين أن : $a = b = c = 0$

لدينا : $ax^2 + bx + c = 0$

إذن : $a = b = c = 0$

ومنه : B أسرة حرة

ومن أ- ب : B أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{S}_2; +; \cdot)$

إذن : $\dim \mathcal{S}_2 = \text{card} B$

$$\dim \mathcal{S}_2 = 3$$

تمرين 7

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$$

1- بين أن : $(F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- حدد أساس ل F ثم استنتج بُعده

الحل

1- لنبين أن : F فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

(1) $F \neq \emptyset$ لأن : $(0, 0) \in F$

نعتبر : $((x, y); (x', y')) \in F^2$ و $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

نبين : $\alpha(x, y) + \beta(x', y') \in F$

$$\alpha(x, y) + \beta(x', y') = (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y')$$

$$E \cap F = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -3x + y - 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$E \cap F = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -\frac{5}{2}z \end{cases} \right\}$$

$$E \cap F = \left\{ \left(-\frac{3}{2}z; -\frac{5}{2}z; z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}$$

- لنبين أن : $(E \cap F; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

بنفس طريقة 1-أ نجد :

$(\mathbb{R}^3; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي من

ومنه : $(E \cap F; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعده

$$\left(-\frac{3}{2}z; -\frac{5}{2}z; z \right) = z \left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}; 1 \right)$$

بنفس طريقة 1 ب نبين أن :

$$E \cap F \text{ أساس للفضاء المتجهي } B = \left\{ \left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}; 1 \right) \right\}$$

إذن : $\dim E \cap F = \text{card} B$

$$\boxed{\dim E \cap F = 1}$$

تمرين 9

لكل : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و $x \in \mathbb{R}^{*+}$

نعتبر الدالة العددية : $\varphi_{(a;b)}(x) = \ln(x^a e^{bx})$

$$E = \{ \varphi_{(a;b)} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

أ- بين أن : $(E; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساس ل E ثم استنتاج بُعده

الحل

$$\begin{aligned} \varphi_{(a;b)}(x) &= \ln(x^a e^{bx}) \\ &= \ln(x^a) + \ln(e^{bx}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{(a;b)}(x) = a \ln(x) + bx}$$

أ- لبين أن : $(E; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \bullet)$

$E \neq \emptyset$ لأن : $\varphi_{(0;0)} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in E$ (1)

نعتبر : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $(\varphi_{(a;b)}; \varphi_{(c;d)}) \in E^2$

ونبين أن : $(\alpha \varphi_{(a;b)} + \beta \varphi_{(c;d)}) \in E$

ليكن $x \in \mathbb{R}^{*+}$

$$\begin{aligned} \alpha(x; y; z) + \beta(x'; y'; z') &= (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y'; \alpha z + \beta z') \\ -3(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + 2(\alpha z + \beta z') &= \alpha(-3x + y + 2z) + \beta(-3x' + y' + 2z') \\ -3(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + 2(\alpha z + \beta z') &= 0 \end{aligned}$$

ومنه : (2)

$$\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \forall ((x; y; z); (x'; y'; z')) \in E^2 : \alpha(x; y; z) + \beta(x'; y'; z') \in E$$

ومن (1) و (2) :

$(\mathbb{R}^3; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي جزئي من

ومنه : E فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعده

نعتبر : $(x; y; z) \in E$ إذن : $y = 3x - 2z$

$$(x; y; z) = (x; 3x - 2z; z)$$

$$\boxed{(x; y; z) = x(1; 3; 0) + z(0; -2; 1)}$$

إذن : $B = ((1; 3; 0), (0; -2; 1))$ أسرة مولدة ل E

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ بحيث : $a(1; 3; 0) + b(0; -2; 1) = (0; 0; 0)$

ثم نبين أن : $a = b = 0$

لدينا : $a(1; 3; 0) + b(0; -2; 1) = (0; 0; 0)$

$$(a; 3a - 2b; b) = (0; 0; 0)$$

ومنه : $a = b = 0$

إذن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E = \text{card} B$

$$\boxed{\dim E = 2}$$

2- أ- بين أن : $(F; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

بنفس طريقة 1-أ نجد :

F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3; +; \bullet)$

ومنه : $(F; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل F ثم استنتاج بُعده

نعتبر : $(x; y; z) \in F$ إذن : $x = y + z$

$$(x; y; z) = (y + z; y; z)$$

$$\boxed{(x; y; z) = y(1; 1; 0) + z(1; 0; 1)}$$

بنفس طريقة 1 ب نبين أن :

F أساس للفضاء المتجهي $B = ((1; 1; 0), (1; 0; 1))$

إذن : $\dim F = \text{card} B$

$$\boxed{\dim F = 2}$$

3- أ- تحديد $E \cap F$

$$\begin{aligned}\varphi_{(a;b)}(x) &= \frac{(a+b)x + a - b}{x^2 - 1} \\ &= \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{(a;b)}(x) = a \frac{1}{(x-1)} + b \frac{1}{(x+1)}}$$

أ - ليبن أن : $(E; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}); +; \bullet)$

$$(1) \quad \varphi_{(0;0)} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in E \quad \text{لأن : } E \neq \emptyset$$

نعتبر : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $(\varphi_{(a;b)}; \varphi_{(c;d)}) \in E^2$

و نبين أن : $(\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)}) \in E$

ليكن $x \in]-1; 1[$

$$\begin{aligned}(\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)})(x) &= \alpha\varphi_{(a;b)}(x) + \beta\varphi_{(c;d)}(x) \\ &= \alpha \left(a \frac{1}{(x-1)} + b \frac{1}{(x+1)} \right) + \beta \left(c \frac{1}{(x-1)} + d \frac{1}{(x+1)} \right) \\ &= (\alpha a + \beta c) \frac{1}{(x-1)} + (\alpha b + \beta d) \frac{1}{(x+1)} \\ &= \varphi_{(\alpha a + \beta c; \alpha b + \beta d)}(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)} = \varphi_{(\alpha a + \beta c; \alpha b + \beta d)}}$$

إذن : (2)

$$(\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) \left((\varphi_{(a;b)}; \varphi_{(c;d)}) \in E^2 \right) : (\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)}) \in E$$

و من (1) و (2) : $(E; *; \bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء

المتجهي $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}); +; \bullet)$

و بالتالي : $(E; *; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعده

نعتبر : $\varphi_{(a;b)} \in E$ و $x \in]-1; 1[$

$$\varphi_{(a;b)}(x) = a \frac{1}{(x-1)} + b \frac{1}{(x+1)} \quad \text{إذن :}$$

و منه : $B = (\varphi_{(1;0)}, \varphi_{(0;1)})$ أسرة مولدة ل E

$$\text{بحيث : } \varphi_{(0;1)}(x) = \frac{1}{(x+1)} \quad \text{و} \quad \varphi_{(1;0)}(x) = \frac{1}{(x-1)}$$

لنبين أن : B أسرة حرة

$$\text{نعتبر : } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{بحيث : } a\varphi_{(1;0)}(x) + b\varphi_{(0;1)}(x) = 0$$

ثم نبين أن : $a = b = 0$

$$\text{لدينا : } a\varphi_{(1;0)}(x) + b\varphi_{(0;1)}(x) = 0$$

$$\forall x \in]-1; 1[\quad a \frac{1}{(x-1)} + b \frac{1}{(x+1)} = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned}(\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)})(x) &= \alpha\varphi_{(a;b)}(x) + \beta\varphi_{(c;d)}(x) \\ &= \alpha(a \ln(x) + bx) + \beta(c \ln(x) + dx) \\ &= (\alpha a + \beta c) \ln(x) + (\alpha b + \beta d)x \\ &= \varphi_{(\alpha a + \beta c; \alpha b + \beta d)}(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)} = \varphi_{(\alpha a + \beta c; \alpha b + \beta d)}}$$

إذن : (2)

$$(\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) \left((\varphi_{(a;b)}; \varphi_{(c;d)}) \in E^2 \right) : (\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)}) \in E$$

و من (1) و (2) : $(E; *; \bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء

المتجهي $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \bullet)$

و بالتالي : $(E; *; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعده

نعتبر : $\varphi_{(a;b)} \in E$ و $x \in \mathbb{R}^{**}$

$$\varphi_{(a;b)}(x) = a \ln(x) + bx \quad \text{إذن :}$$

و منه : $B = (\varphi_{(1;0)}, \varphi_{(0;1)})$ أسرة مولدة ل E

$$\text{بحيث : } \varphi_{(0;1)}(x) = x \quad \text{و} \quad \varphi_{(1;0)}(x) = \ln(x)$$

لنبين أن : B أسرة حرة

$$\text{نعتبر : } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{بحيث : } a\varphi_{(1;0)}(x) + b\varphi_{(0;1)}(x) = 0$$

ثم نبين أن : $a = b = 0$

$$\text{لدينا : } a\varphi_{(1;0)}(x) + b\varphi_{(0;1)}(x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{**} \quad a \ln(x) + bx = 0$$

نعتبر : $x = 1$ نجد : $b = 0$

نعتبر : $x = e$ نجد : $a = 0$

و منه : $a = b = 0$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E = \text{card} B$

$$\boxed{\dim E = 2}$$

تمرين 10

لكل : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و $x \in]-1; 1[$ ؛ $I =]-1; 1[$

$$\varphi_{(a;b)}(x) = \frac{(a+b)x + a - b}{x^2 - 1} \quad \text{نعتبر الدالة العددية :}$$

$$E = \{ \varphi_{(a;b)} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

أ - بين أن : $(E; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساس ل E ثم استنتاج بُعده

الحل

ولدينا : $\vec{u} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$

$$\text{إذن : } \begin{cases} a+b+c=1 \\ a-2b-c=2 \\ a-b+c=3 \end{cases} \text{ ومنه : } a=0; b=-\frac{5}{3}; c=\frac{4}{3}$$

$$\text{إذن : } \vec{u} \left(0; -\frac{5}{3}; \frac{4}{3} \right) \text{ في الأساس } B_2$$

تمرين 12

$$E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} / (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\text{نضع : } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1- تحقق أن : $IK = KJ = I + J; k^2 = J + K; j^2 = K$
- 2- بين أن : $(E; +; \bullet)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له
- 3- بين أن : $(E; +; \times)$ حلقة واحدة
- 4- تحقق أن : $J^3 = I + J$ ثم حدد J^{-1}

الحل

$$1- \text{ نتحقق أن : } IK = KJ = I + J; k^2 = J + K; j^2 = K$$

الحساب

$$2- (E; +; \bullet) \text{ فضاء متجهي حقيقي}$$

يكفي أن نبين أن : E فضاء متجهي جزئي من $(M_3(\mathbb{R}); +; \bullet)$ تحديد أساس ل E

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{إذن : } B_2 = (I; J; K) \text{ أساس ل } E$$

$$3- \text{ لنبين أن : } (E; +; \times) \text{ حلقة واحدة}$$

$$\text{أ- نبين أن : } (E; +) \text{ زمرة جزئية من } (M_3(\mathbb{R}); +)$$

$$\text{و بما أن : } (M_3(\mathbb{R}); +) \text{ زمرة تبادلية}$$

$$\text{فإن : } (E; +) \text{ زمرة تبادلية (1)}$$

$$\text{ب- نبين أن : } (E; \times) \text{ جزء مستقر من } (M_3(\mathbb{R}); \times)$$

$$\text{و بما أن : } (M_3(\mathbb{R}); \times) \text{ تجميعي تبادلي يقبل عنصرا محايدا } I$$

$$\text{و } I \in E$$

$$\text{و } \times \text{ توزيعي بالنسبة ل } + \text{ في } M_3(\mathbb{R})$$

$$\text{فإن : } (E; \times) \text{ تجميعي تبادلي يقبل عنصرا محايدا } I$$

$$\text{و } \times \text{ توزيعي بالنسبة ل } + \text{ في } E \text{ (2)}$$

$$\text{من (1) و (2) : } (E; +; \times) \text{ حلقة واحدة}$$

نعتبر : $x=0$ نجد : $a=b$

$$\text{إذن : } \forall x \in]-1; 1[\quad a \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+1)} \right) = 0$$

$$\text{ومنه : } \forall x \in]-1; 1[\quad a \times \frac{2x}{x^2-1} = 0$$

$$\text{إذن : } a=0$$

$$\text{ومنه : } a=b=0$$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

$$\text{إذن : } \dim E = \text{card} B$$

$$\dim E = 2$$

تمرين 11

$$3 \text{ بُعده } B_1 = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3) \text{ أساس في فضاء متجهي حقيقي } E$$

$$B_2 = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3) \text{ أسرة بحيث :}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{e}_2 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 \\ \vec{e}_3 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \end{cases}$$

$$1- \text{ بين أن } B_2 \text{ أساس في } E$$

$$2- \vec{u} (1; 2; 3)_{B_1} \text{ في الأساس } B_1 \text{ أوجد احداثيات } \vec{u} \text{ في الأساس } B_2$$

الحل

$$1- \text{ لدينا : } \vec{e}_1 (1; 1; 1); \vec{e}_2 (1; -2; -1); \vec{e}_3 (2; -1; 1) \text{ في الأساس } B_1$$

$$\text{و } \dim E = 3 \text{ و } \text{card} B_2 = 3$$

$$\text{إذن : } \dim E = \text{card} B_2$$

$$\text{ومنه : للبرهنة أن } B_2 \text{ أساس في } E$$

$$\text{يكفي أن نبرهن أن : } B_2 \text{ حرة}$$

$$\text{لدينا : } \det(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\text{بما أن : } \det(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3) \neq 0 \text{ فإن : } B_2 \text{ حرة}$$

$$\text{ومنه : } B_2 \text{ أساس في } E$$

$$2- \vec{u} (1; 2; 3)_{B_1} \text{ في الأساس } B_1 \text{ أوجد احداثيات } \vec{u} \text{ في الأساس } B_2$$

$$\text{نعتبر : } \vec{u} (a; b; c)_{B_2} \text{ في الأساس } B_2$$

إذن :

$$\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

$$\vec{u} = a(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + b(\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3) + c(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3)$$

$$\vec{u} = (a+b+c)\vec{u}_1 + (a-2b-c)\vec{u}_2 + (a-b+c)\vec{u}_3$$

$$M^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -7 & -15 & 17 \\ 6 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

إذن :

$$J^3 = I + J \quad \text{(الحساب) } -4$$

$$J^3 = I + J \Rightarrow J^{-1}J^3 = J^{-1}I + J^{-1}J$$

$$\Rightarrow J^2 = J^{-1} + I$$

$$\Rightarrow J^{-1} = I - J^2$$

$$\Rightarrow J^{-1} = I - K$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه :}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين 13

حدد : M^{-1}

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad -2 \quad M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad -1$$

الحل

$$-1 \quad \text{تحديد : } M^{-1} \text{ بحيث : } M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \frac{1}{2}$$

$${}^t \text{Com}(M) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \text{Com}(M) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \times {}^t(\text{com}M) \quad \text{لدينا :}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$-2 \quad \text{تحديد : } M^{-1} \text{ بحيث : } M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 12$$

$$\text{Com}(M) = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -15 & 6 & 3 \\ 17 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t \text{Com}(M) = \begin{pmatrix} -7 & -15 & 17 \\ 6 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \times {}^t(\text{com}M) \quad \text{لدينا :}$$

الموسم الدراسي : 2015/2016

المديرية الإقليمية للتربية و التكوين
تارودانت
الثانوية التأهيلية محمد السادس - تالوين

الأستاذ : معاذ أكرام

المستوى : الثانية باكوريا علوم رياضية - أ

سلسلة تمارين درس الفضاءات المتجهية الحقيقية

التمرين 1

1. ادرس في \mathbb{R}^3 استقلال الأسر التالية :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 &= \{(1, 1, -1), (1, -1, 0)\} & \mathcal{B}_1 &= \{(1, 0, 1), (2, 1, -1), (0, 1, -2)\} \\ \mathcal{B}_4 &= \{(1, 1, 1), (2, -1, 1), (1, 0, 1)\} & \mathcal{B}_3 &= \{(3, -1, 1), (-1, 0, 2), (1, 0, -2)\} \end{aligned}$$

التمرين 2

1. حدد من بين الأسر التالية التي تكون اساس للفضاء المتجهي \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{(1, 1, 1), (3, 0, -1), (-1, 1, -1)\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{(1, 1, -1), (1, -1, 0)\} \\ \mathcal{B}_3 &= \{(1, 2, 1), (3, 0, -1), (1, 8, 1)\} \\ \mathcal{B}_4 &= \{(1, 2, -3), (1, 0, -1), (1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

التمرين 3

في الفضاء المتجهي \mathbb{R}^3 نعتبر المجموعات :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 4z = 0\} & E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\} \\ E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy - z = 0\} & E_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = 0 \text{ et } z - x = 0\} \\ E_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 4z = 0\} & E_6 &= \{(\alpha, \beta, 2\alpha) / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

1. حدد من بين المجموعات اعلاه التي تمثل فضاءات متجهية جزئية للفضاء المتجهي \mathbb{R}^3 .

التمرين 4

نعتبر المجموعة E المعرفة بما يلي : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 3z = 0\}$ 1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.2. نعتبر في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ المتجهتين : $\vec{e}_1 = (0, 3, 1)$ و $\vec{e}_2 = (1, 1, 0)$.1.2 بين أن الأسرة $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$.2.2 بين أن الأسرة $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ حرة في الفضاء $(E, +, \cdot)$.

التمرين 5

نعتبر المجموعة E ومجموعة الدوال العددية f المعرفة على $D - \{1\}$ بما يلي : $f(x) = \frac{P(x)}{x^3 - 1}$ حيث $P(x)$ حدودية درجتها أصغر أو يساوي 2.

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2. نعتبر الدوال $g_1(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g_2(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ و $g_3(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.

1.2. بين أن الأسرة $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3\}$

2.2. حدد إحداثيات الدالة $h(x) = \frac{1}{x^3-1}$ بالنسبة للأساس \mathcal{B} .

التمرين 6

لتكن P_4 مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من أو يساوي 4 بحيث : $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ أساس للفضاء المتجهي $(P_4, +, \cdot)$.

1. بين أن الأسرة $\mathcal{T} = \{(1+x)^4, x(1+x)^3, x^2(1+x)^2, x^3(1+x), x^4\}$ أساس للفضاء المتجهي $(P_4, +, \cdot)$.

2. حدد إحداثيات الحدودية $P(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ في الأساس \mathcal{T} .

التمرين 7

نعرف في المجموعة $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي $+$ بما يلي : $(x, y) + (x', y') = (xx', y + y')$; $(\forall (x, y), (x', y') \in E)$ وقانون التركيب الداخلي معاملاته في \mathbb{R} بما يلي : $\alpha(x, y) = (x^\alpha, \alpha y)$; $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; (\forall (x, y) \in E)$.

1. نعتبر التطبيق : $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$

$$(x, y) \mapsto (e^x, y)$$

نذكر $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

1.1. بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^2, +)$ نحو $(E, +)$.

1.2. استنتج أن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

1.3. حدد العنصر المحايد في $(E, +)$ وما هو مماثل (x, y) في $(E, +)$.

2. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

التمرين 8

نعتبر المجموعة التالية : $E = \{f : x \mapsto (ax + b)e^{2x} / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2. لتكن f_1 و f_2 الدالتين العدديتين المعرفتين على \mathbb{R} بما يلي : $f_1(x) = xe^{2x}$ و $f_2(x) = e^{2x}$.

2.1. بين أن الأسرة $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ أساس للفضاء المتجهي E .

2.2. بين أن الدالة $g(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{2})e^{2t} dt$ تنتمي الى المجموعة E . محدداً زوج احداثياتها بالنسبة للأساس \mathcal{B} .