

البنيات الجبرية

1 قانون التركيب الداخلي:

قانون تركيب داخلي

لتكن E مجموعة
كل تطبيق f من $E \times E$ نحو E يسمى قانون تركيب داخلي في E
 $f : E \times E \rightarrow E$
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$
 غالبا ما نرمز ل $f(x, y) : x * y$ أو $x \text{Ty}$ أو $x \perp y$
 ونقول إن المجموعة E مزودة بقانون التركيب الداخلي $*$ و نكتب $(E, *)$

جزء مستقر

لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ وليكن S جزءا من E
 نقول إن S جزء مستقر من $(E, *)$ إذا كان : $x * y \in S : (\forall (x, y) \in S^2)$

خصائص قوانين التركيب الداخلية

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E
 \diamond $*$ تجميعي في $E \Leftrightarrow (\forall (x, y, z) \in E^3) x * (y * z) = (x * y) * z$
 \diamond $*$ تبادلي في $E \Leftrightarrow (\forall (x, y) \in E^2) x * y = y * x$

العنصر المحايد

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E و $e \in E$
 \checkmark e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون $*$ $\Leftrightarrow x * e = x$ و $e * x = x$ $(\forall x \in E)$
 \checkmark إذا كان للقانون $*$ عنصرا محايدا فإنه وحيد

العنصر المماثل

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E بحيث $*$ يقبل عنصرا محايدا e وليكن $x \in E$
 \checkmark x يقبل ممائلا في بالنسبة للقانون $*$ إذا وفقط إذا وجد عنصر x' من E بحيث : $x * x' = x' * x = e$
 \checkmark بالإضافة إذا كان القانون $*$ تجميعي فإن x' وحيد
 \checkmark بالإضافة إذا كان القانون $*$ تجميعي و كان x' مائل x و y' مائل y فإن $(x * y)' = y' * x'$

العنصر المنتظم

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E . نقول إن عنصرا a من E منتظم إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall (x, y) \in E^2) \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

(2) التشاكل:

❖ ليكن $*$ قانون تركيب داخلي في E و T قانون تركيب داخلي في F
نسمي تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T) كل تطبيق $f : E \rightarrow F$ يحقق :

$$(\forall (x, y) \in E^2) f(x * y) = f(x) T f(y)$$

- ❖ إذا كان f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T) فإن $f(E)$ جزء مستقر من (F, T)
- ❖ إذا كان f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T) و $*$ تجميعي في E فإن T تجميعي في $f(E)$
- ❖ إذا كان f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T) و $*$ تبادلي في E فإن T تبادلي في $f(E)$
- ❖ إذا كان e عنصر محايد في $(E, *)$ فإن $f(e)$ عنصر محايد في $(f(E), T)$
- ❖ إذا كان x' مماثل x في $(E, *)$ فإن $(f(x'))' = f(x')$ هو مماثل $f(x)$ في $(f(E), T)$

(3) الزمرة:

لتكن G مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$
نقول إن $(G, *)$ زمرة إذا وفقط إذا كان :

- $*$ تجميعي في G
 - يقبل عنصرا محايدا
 - كل عنصر من G يقبل مائلا
- بالإضافة إذا كان القانون $*$ تبادلي فإننا نقول أن $(G, *)$ زمرة تبادلية

➤ لتكن $G, *$ زمرة

- كل عنصر a من G منتظم
- ليكن a و b من G : كل من المعادلتين $a * x = b$ و $x * a = b$ تقبل حلا وحيدا في G

زمرة جزئية

لتكن $G, *$ زمرة و H جزء مستقر من $G, *$

▪ $H, *$ زمرة جزئية ل $(G, *)$ إذا وفقط إذا كان $(H, *)$ زمرة

لتكن $G, *$ زمرة عنصرها المحايد e ولتكن H زمرة جزئية ل $G, *$ ، لدينا :

- $H \neq \emptyset$
- e هو العنصر المحايد في H
- إذا كان $x \in H$ و x' مماثل x في G فإن $x' \in H$
- $x * y' \in H$ حيث $(\forall (x, y) \in H^2)$ حيث y' مماثل y في G

لتكن $G, *$ زمرة و H جزء من G . تكون H زمرة جزئية ل $G, *$ إذا وفقط إذا كان :

- $H \neq \emptyset$
- $x * y' \in H$ حيث $(\forall (x, y) \in H^2)$ حيث y' مماثل y في G

تشاكل الزمر

لتكن $G, *$ زمرة و لتكن E مزودة بقانون تركيب داخلي T و $E, T \rightarrow G, *$: تشاكل لدينا ما يلي :

- $(f(G), T)$ زمرة
- إذا كانت $(G, *)$ زمرة تبادلية فإن $f(G), T$ زمرة تبادلية
- إذا كان f تشاكل شمولي ، فإن $f(G) = E$ و منه (E, T) زمرة.

(4) الحلقة :

توزيعية قانون بالنسبة لآخر

لتكن E مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T

نقول أن T توزيعي بالنسبة ل $*$ إذا وفقط إذا كان :

- $(\forall (x, y, z) \in E^3) \quad x T (y * z) = (x T y) * (x T z)$
- $(\forall (x, y, z) \in E^3) \quad (x * y) T z = (x T z) * (y T z)$

الحلقة

لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T

نقول أن $(A, *, T)$ حلقة إذا وفقط إذا كان :

- $(A, *)$ زمرة تبادلية
- T تجميعي
- T توزيعي بالنسبة ل $*$

- ✓ بالإضافة إذا كان القانون T تبادلي نقول إن الحلقة A تبادلية
- ✓ بالإضافة إذا كان للقانون T عنصر محايد ، نقول إن الحلقة A و احادية.

$\forall a \in A \quad aTe = eTa = e$: لدينا ، e حلقة صفرها $A, *, T$ لتكن
 $\forall a \in A \quad aTe = eTa = e$: لدينا ، e حلقة صفرها $A, *, T$ لتكن
 $(\forall (a, b) \in A^2) \quad aTb' = a'Tb = (aTb)'$

العناصر القابلة للمائلة

$A, *, T$ حلقة حلقة وحادية وحدتها
 نقول إن عنصرا a من A قابلا للمائلة أو يقبل مقلوبا إذا كان له مماثلا بالنسبة للقانون T في A

$A, *, T$ حلقة حلقة وحادية وحدتها و لتكن U مجموعة العناصر لقابلة للمائلة ، لدينا : U, T زمرة

قواسم الصفر في حلقة

$A, *, T$ حلقة حلقة صفرها 0_A
 نقول إن عنصرا a من A قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان : $a \neq 0_A$ و يوجد $b \neq 0_A$ بحيث : $aTb = 0_A$

$A, *, T$ حلقة
 نقول إن الحلقة $(A, *, T)$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر

(5) الجسم :

لتكن K مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T
 نقول إن $(K, *, T)$ جسم إذا وفقط إذا كان :

- حلقة $(K, *, T)$ وحادية
- كل عنصر يخالف صفر الحلقة يقبل مماثلا بالنسبة ل T

ليكن $K, +, \times$ جسما
 لدينا كل عنصر من $K - \{0_A\}$ منتظم بالنسبة للضرب . يعني :

$$(\forall a \in K - \{0_A\})(\forall (x, y) \in K^2) : \begin{cases} a.x = a.y \Rightarrow x = y \\ x.a = y.a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

ليكن $K, +, \times$ جسما. لدينا :

$$(\forall (x, y) \in K^2) : x.y = 0_K \Rightarrow x = 0_K \text{ أو } y = 0_K$$

\Rightarrow كل جسم هو حلقة كاملة

ليكن $K, +, \times$ جسما . نعتبر المعادلة $a \times x = b$

▪ إذا كان $a \neq 0_K$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا $x = a^{-1}b$

▪ إذا كان $a = 0_K$ و $b \neq 0_K$ فإن المعادلة ليس لها حلا

▪ إذا كان $a = 0_K$ و $b = 0_K$ فإن $S = K$