

9- ليكن T مجموعة إزاحة المستوى. و H_0 مجموعة التحاكيات التي مركزها O . و R_0 مجموعة الدورانات التي لها نفس المركز O . التركيب "o" قانون تركيب داخلي في كل من T و H_0 لأن:

$$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$$

$$h_{(O,R)} \circ h_{(O,R')} = h_{(O,RR')}$$

$$R_{(o,\alpha)} \circ R_{(o,\beta)} = R_{(o,\alpha+\beta)}$$

10- القانون * المعرف على \mathbb{R} بما يلي:

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2) a * b = a^4 + a^3 - 3a^2b$$

قانون تركيب داخلي في \mathbb{R} .

11- نعتبر المجموعة $E = \{1, 2, 3, 6\}$

لنبين أن المضاعف المشترك الأصغر "v" قانون تركيب داخلي في E .

ولهذا نضع الجدول التالي الذي يسمى جدول القانون في E أو جدول (E, v) .

v	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

نلاحظ أن مركب أي عنصر من E هو عنصر من E . وبالتالي القانون "v" قانون تركيب داخلي في E .

3- جزء مستقر بالنسبة لقانون تركيب داخلي:

(a) تعريف:

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي * . وليكن S جزءا من $(S \subset E) E$.

نقول إن S جزء مستقر من $(E, *)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (x, y) \in S^2) x * y \in S$$

(b) أمثلة:

1- \mathbb{R}^+ جزء مستقر من (\mathbb{R}, \times)

2- \mathbb{R}_- ليس جزءا مستقرا من (\mathbb{R}, \times)

3- نعتبر المجموعة: $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

$$(\forall (z, z') \in U^2) : |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'| = 1 \cdot 1 = 1$$

$$(\forall (z, z') \in U^2) : zz' \in U \quad \text{إذن:}$$

إذن U جزء مستقر من (\mathbb{C}, \times)

ملاحظة:

إذا كان S جزءا مستقرا من $(E, *)$ فإن * قانون تركيب داخلي في S .

(I) تعريف وأمثلة:

1- تعريف:

لتكن E مجموعة غير فارغة. نسمي قانون تركيب داخلي في E

$$f : E \times E \rightarrow E :$$

كل تطبيق f من E نحو E

$$(a, b) \rightarrow a * b$$

ترميز: العنصر $f(a, b)$ يسمى مركب العنصرين (a, b)

ونرمز له عادة ب $a * b$; $a \perp b$; $a \perp b$;

إذا كان * قانون تركيب داخلي في E فإننا نكتب $(E, *)$ ونقرأ المجموعة E مزودة بالقانون * .

ملاحظة: ليكن * قانون تركيب داخلي في E :

$$(\forall (a, b, c, d) \in E^4) \quad \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a * c = b * d$$

لأن:

$$\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow (a, c) = (b, d) \Rightarrow f(a, c) = f(b, d)$$

$$\Rightarrow a * c = b * d$$

(* لدينا:

$$(\forall (a, b, c) \in E^3) \begin{cases} a = b \Rightarrow a * c = b * c \\ a = b \Rightarrow c * a = c * b \end{cases}$$

2- أمثلة:

1- الجمع والضرب قانونا تركيب داخلي في $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

2- الضرب قانون تركيب داخلي في \mathbb{R}^+ لكنه ليس كذلك في \mathbb{R}^- . لأن إذا كان $(a, b) \in \mathbb{R}_-^2$ فإن: $(a \times b) \in \mathbb{R}^+$ أي

$$(a \times b) \notin \mathbb{R}_-$$

3- جمع متجهتين قانون تركيب داخلي في كل من V_3 و V_2 .

4- الجداء السلمي ليس قانون تركيب داخلي في V_3 و V_2 .

5- الجداء المتجهي قانون تركيب داخلي في V_3 .

6- لتكن E مجموعة غير فارغة و $P(E)$ مجموعة أجزاء E . الاتحاد والتقاطع والفرق التماثلي قوانين تركيب داخلية في $P(E)$.

7- ليكن X جزء من \mathbb{R} . ليكن $F(X, \mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من X نحو \mathbb{R} . الجمع والضرب المعرفين على $F(X, \mathbb{R})$ كما يلي:

$$(\forall x \in X) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

قوانين تركيب داخلية في $F(X, \mathbb{R})$.

8- لتكن $A(E, E)$ مجموعة التطبيقات من E نحو E .

E مجموعة غير فارغة.

التركيب o المعرف على $A(E, E)$ ب:

$$(\forall x \in E) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قانون تركيب داخلي في $A(E, E)$.

(II) خاصيات قوانين التركيب الداخلي:

1- التجميعية والتبادلية:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E .

(1) نقول إن القانون * تجميعي في E إذا وفقط إذا كان

$$(\forall (a,b,c) \in E^3) a * (b * c) = (a * b) * c$$

(2) نقول إن القانون * تبادلي في E إذا وفقط إذا كان

$$(\forall (a,b) \in E^2) a * b = b * a$$

ملاحظة:

إذا كان القانون * تجميعي فإن:

$$a * (b * c) = a * b * c$$

(b) أمثلة:

القوانين (1), (3), (6), (7) و (9) التي رأيناها في أمثلة قوانين التركيب الداخلية كلها تجميعية وتبادلية (الفقرة I).

. لنبين على (7) و (9):

لنبين أن الجمع تجميعي في $F(X, \mathbb{R})$:

ليكن f, g, h من $F(X, \mathbb{R})$. لنبين أن:

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

$$(f + (g + h))(x) = ((f + g) + h)(x)$$

يعني:

لدينا:

$$(\forall x \in X)(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x)$$

$$= f(x) + g(x) + h(x)$$

$$= (f(x) + g(x)) + h(x)$$

$$= (f + g)(x) + h(x)$$

$$= ((f + g) + h)(x)$$

(لأن الجمع تجميعي في \mathbb{R}).

إذن $f + (g + h) = (f + g) + h$ ومنه الجمع تجميعي في

$F(X, \mathbb{R})$.

لنبين أن o تجميعي في T :

نعتبر $t_{\bar{u}}$ و $t_{\bar{v}}$ و $t_{\bar{w}}$ من T لنبين أن:

$$t_{\bar{u}} o (t_{\bar{v}} o t_{\bar{w}}) = (t_{\bar{u}} o t_{\bar{v}}) o t_{\bar{w}}$$

لدينا:

$$t_{\bar{u}} o (t_{\bar{v}} o t_{\bar{w}}) = t_{\bar{u}} o t_{\bar{v} + \bar{w}}$$

$$= t_{\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})} = t_{\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}} = t_{\bar{u} + \bar{v}} o t_{\bar{w}}$$

$$= (t_{\bar{u}} o t_{\bar{v}}) o t_{\bar{w}}$$

(لأن الجمع تجميعي في V_3).

إذن:

$$(\forall (t_{\bar{u}}, t_{\bar{v}}, t_{\bar{w}}) \in T^3); t_{\bar{u}} o (t_{\bar{v}} o t_{\bar{w}}) = (t_{\bar{u}} o t_{\bar{v}}) o t_{\bar{w}}$$

إذن o تجميعي في T .

ملاحظة:

الجداد المتجهي ليس تجميعيا ولا تبادليا في V_3 .

ليكن $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{h})$ معلم م.م مباشر.

← لدينا $\bar{i} \wedge \bar{j} = -\bar{j} \wedge \bar{i}$ ليس تبادليا.

← لدينا $(\bar{i} \wedge \bar{j}) \wedge \bar{j} = \bar{h} \wedge \bar{j} = -\bar{i}$

$$\bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge \bar{j}) = \bar{i} \wedge \bar{0} = \bar{0} \quad \text{و}$$

$$(\bar{i} \wedge \bar{j}) \wedge \bar{j} \neq \bar{i} \wedge (\bar{j} \wedge \bar{j}) \quad \text{إذن}$$

ومنه "∧" (الجداد المتجهي) ليس تجميعيا في V_3 .

تمرين تطبيقي:

نعتبر القانون * المعرف على \mathbb{R} بما يلي:

$$x * y = x + y + xy$$

ادرس تجميعية وتبادلية القانون *.

التبادلية:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) x * y = x + y + xy \quad \text{لدينا:}$$

$$= y + x + yx = y * x$$

إذن $x * y = y * x$ ومنه * تبادلي.

التجميعية:

ليكن x, y, z من \mathbb{R} لنتحقق هل:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

لدينا:

$$(x * y) * z = (x + y + xy) * z$$

$$= x + y + xy + z + (x + y + xy)z$$

$$= x + y + xy + z + xz + yz + xyz \quad (1)$$

ولدينا:

$$x * (y * z) = x * (y + z + yz)$$

$$= x + y + z + yz + x(y + z + yz)$$

$$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \quad (2)$$

وبما أن (1) و (2) فإن * تجميعي:

$$(\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3) (x * y) * z = x * (y * z)$$

(c) تجميعية مركب تطبيقي:

خاصية:

نعتبر التطبيقات من:

$$E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H$$

$$ho(gof) = (hog)of \quad \text{لدينا:}$$

هذا لا يعني أن o تجميعي.

- لنبين أن: $ho(gof) = (hog)of$

يعني:

$$(\forall x \in E) (ho(gof))(x) = ((hog)of)(x)$$

- ليكن $x \in E$

$$h(z) = t \text{ و } f(x) = z \text{ و } g(x) = y \text{ نضع}$$

لدينا:

$$((hog)of)(x) = (hog)(f(x)) = (hog)(y)$$

$$= h(g(y)) = h(z) = t$$

ولدينا:

$$(ho(gof))(x) = h((gof)(x))$$

$$= h(g(f(x))) = h(g(y))$$

$$= h(z) = t$$

إذن:

$$(\forall x \in E)((hog)of)(x) = (ho(gof))(x)$$

$$(hog)of = ho(gof) \quad \text{ومنه:}$$

حالة خاصة:

ليكن $A(E, E)$ مجموعة التطبيقات من E نحو E .
لدينا "o" قانون تجميعي غير تبادلي في $A(E, E)$.

2- العنصر المحايد:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E و $e \in E$.
نقول إن e عنصر محايد في E بالنسبة للقانون * أو عنصر محايد في $(E, *)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in E) e * x = x \text{ et } x * e = x$$

ملاحظة:

إذا كان القانون * تبادلي فإن e عنصر محايد إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in E) x * e = x$$

(b) أمثلة:

← العدد 0 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{N}, +)$
← العدد 1 هو العنصر المحايد في كل من $(\mathbb{C}, \times), (\mathbb{R}, \times), (\mathbb{Q}, \times), (\mathbb{Z}, \times), (\mathbb{N}, \times)$
← $\vec{0}$ هو العنصر المحايد في كل من: $(V_3, +), (V_2, +)$
← \emptyset هو العنصر المحايد في $(P(E), \cup)$
← E هو العنصر المحايد في $(P(E), \cap)$
← \emptyset هو العنصر المحايد في $(P(E), \Delta)$
← الدالة $\theta: x \rightarrow 0$ هو العنصر المحايد في $(F(X, \mathbb{R}), +)$
← الدالة $f: x \rightarrow 1$ هو العنصر المحايد في $(F(X, \mathbb{R}), \times)$
← التطبيق المطابق $Id_E: x \rightarrow x$ عنصر محايد في $(A(E, E), o)$
 $(f \circ Id_E = Id_E \circ f = f)$

ملاحظة:

نعتبر القانون * المعرف على \mathbb{N}^* بما يلي:

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{N}^{*2}) a * b = a^b$$

$$\text{لدينا: } (1) (\forall a \in \mathbb{N}^*) a * 1 = a^1 = a$$

$$\text{ولدينا: } 1 * a = 1^a = 1$$

إن 1 ليس عنصر محايدا.

وبما أنه يحقق (1) نقول إن 1 محايد على اليمين.

تعريف:

← نقول إن e عنصر محايد على اليمين في $(E, *)$ إذا وفقط إذا كان

$$(\forall x \in E) x * e = x$$

← نقول إن e عنصر محايد على اليسار في $(E, *)$ إذا وفقط إذا كان

$$(\forall x \in E) e * x = x$$

← يكون e محايدا إذا وفقط إذا كان محايد E على اليمين وعلى اليسار.

(c) وحدانية العنصر المحايد:

خاصية:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E . إذا كان للقانون * عنصرا محايدا فإنه وحيد.

برهان:

نفترض أن * يقبل عنصرين محايدين e' و e

لدينا e عنصر محايد و $e' \in E$ إذن: $e * e' = e'$

ولدينا e' عنصر محايد و $e \in E$ إذن: $e * e' = e$

$$e' = e$$

ومنه العنصر المحايد وحيد. (إذا كان موجودا).

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر * القانون المعرف على \mathbb{R} بما يلي:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) x * y = xy - 4x - 4y + 20$$

- هل للقانون * عنصر محايد؟

. لنبحث عن e من \mathbb{R} بحيث: $(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x * e = x$

ونلاحظ أن * تبادلي. إذن يكفي أن نبحث عن e بحيث:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x$$

لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) ex - 4e - 4x + 20 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) x(e - 5) - 4e + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e - 5 = 0 \\ 20 - 4e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 5 \\ e = 5 \end{cases}$$

إذن $e = 5$ هو العنصر المحايد للقانون *.

تمرين (2):

نعتبر القانون * المعرف على \mathbb{R} ب:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) x * y = x + 4y - 1$$

هل للقانون * عنصر محايد؟

. لنبحث عن e من \mathbb{R} بحيث $(\forall x \in \mathbb{R}) x * e = e * x = x$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x * e = x \text{ et } e * x = x$$

يعني:

- لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) e * x = x \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) e + 4x - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) e + 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 0 \\ e - 1 = 0 \end{cases}$$

وهذا مستحيل.

إذن * لا يقبل عنصرا محايدا في \mathbb{R} .

3- العنصر المماثل:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E . نفترض أن * يقبل عنصرا محايدا e .

نقول إن عنصرا x من E يقبل مائلا بالنسبة ل * إذا وفقط إذا وجد عنصر x' من E بحيث:

$$x * x' = x' * x = e$$

ملاحظة:

إذا كان القانون * تبادلي نكتفي بإحدى المتساويتين.

(b) أمثلة:

← في كل من $(\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Z}, +)$ كل عنصر x يقبل مائلا هو $-x$.

← في $(\mathbb{C}^*, \times); (\mathbb{R}^*, \times); (\mathbb{Q}^*, \times)$ كل عنصر x يقبل مائلا هو $\frac{1}{x}$.

$$\text{لأن: } x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$$

← ليكن $B(E, E)$ مجموعة التقابلات من E نحو E .

لدينا "o" قانون تركيب داخلي في $B(E,E)$ العنصره المحايد هو التطبيق الطابق Id_E .

كل عنصر f من $B(E,E)$ له مماثل هو تقابله العكسي f^{-1} لأن: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_E$

(c) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن * قانون تركيب داخلي في E . نفترض أن القانون * يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي. إذا كان لعنصر x مماثل x' فإن هذا المماثل وحيد.

برهان:

نفترض أن x يقبل مماثلين x' و x'' .
يعني: $x * x' = x' * x = e$
 $x * x'' = x'' * x = e$

- لدينا:

$$x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$$

إذن $x' = x''$

خاصية (2):

ليكن * قانون تركيب داخلي في E . نفترض أن القانون * يقبل عنصرا محايدا e وتجميعي. إذا كان لعنصرين x و y مماثلان x' و y' فإن: $x * y$ يقبل مماثلا هو $y' * x'$.

يعني: $(x * y)' = y' * x'$

برهان:

لدينا:

$$(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = x * e * x' = (x * e) * x' = x * x' = e$$

وبنفس الطريقة نجد: $(y' * x') * (x * y) = e$

استنتاج:

ليكن $g \circ f$ من $B(E,E)$

مماثل f هو f^{-1} ومماثل g هو g^{-1} .

مماثل $f \circ g$ هو $g^{-1} \circ f^{-1}$.

ونعلم أن مماثل $f \circ g$ هو $(f \circ g)^{-1}$

إذن: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

تمرين:

نعتبر القانون * المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20$$

من خلال ما سبق 5 هو العنصر المحايد.

- حدد العناصر التي تقبل مماثلا.

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لنتحقق هل x يقبل مماثلا.

لنبحث عن x' بحيث $x * x' = 5$ (القانون تبادلي).

لدينا: $x * x' = 5 \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 20 = 5$

$$\Leftrightarrow x'(x-4) = 4x-15$$

← إذا كان $x \neq 4$

فإن: $x' = \frac{4x-15}{x-4}$ ومنه x يقبل مماثلا هو $\frac{4x-15}{x-4}$

← إذا كان $x=4$

فإن $o=1$ ومنه 4 لا يقبل مماثلا

إذن مجموعة العناصر التي تقبل مماثلا هي: $\mathbb{R} - \{4\}$

والمماثل هو: $\frac{4x-15}{x-4}$.

4- العنصر المنتظم:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E . نقول إن عنصرا a من E منتظم إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall (x,y) \in E^2) \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

ملاحظة:

إذا كان القانون * تبادلي فإن أحد الاستلزامين كاف.

(b) أمثلة:

← جميع عناصر كل من المجموعات $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ منتظمة

بالنسبة للجمع لأن: $a + x = a + y \Rightarrow x = y$

← في كل من $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ كل عنصر $a \neq 0$ منتظم بالنسبة

للضرب لأن: $ax = ay \Rightarrow x = y$

تمرين:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E ، تجميعي.

e العنصر المحايد في $(E, *)$. ليكن $a \in E$.

- بين أنه إذا كان a يقبل مماثلا فإن a منتظم.

نفترض أن a يقبل مماثلا a'

لنبين أن a منتظم أي:

$$(\forall (x,y) \in E^2) \quad a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

$$x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

لدينا:

$$a * x = a * y \Rightarrow a' * (a * x) = a' * (a * y)$$

$$\Rightarrow (a' * a) * x = (a' * a) * y$$

$$\Rightarrow e * x = e * y$$

$$\Rightarrow x = y$$

وبنفس الطريقة نبين أن: $x * a = y * a \Rightarrow x = y$

إذن a منتظم.

(III) التماثل:

1- تعريف وأمثلة:

(a) تعريف:

ليكن * قانون تركيب داخلي في E .

و T قانون تركيب داخلي في F .

نسمة تماثل من $(E, *)$ نحو (F, T) كل تطبيق $f: E \rightarrow F$

يحقق ما يلي:

$$(\forall (x,y) \in E^2): f(x * y) = f(x) T f(y)$$

(b) أمثلة:

1- نعتبر التطبيق: $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$

$$x \rightarrow ax$$

لنبين أن f تشاكل.

يعني: $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay$$

$$= f(x) + f(y)$$

لدينا:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x+y) = f(x) + f(y)$$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R}, +)$ نحو $(\mathbb{R}, +)$.

2- نعتبر $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$r \rightarrow a^r \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Q}, +)$ نحو (\mathbb{R}, \times)

- ليكن r و r' من \mathbb{Q} .

$$f(r+r') = f(r) \times f(r')$$

لدينا:

$$f(r+r') = a^{r+r'} = a^r \times a^{r'} = f(r) \times f(r')$$

$$(\forall (r, r') \in \mathbb{Q}^2) f(r+r') = f(r) \cdot f(r')$$

ومنه f تشاكل من $(\mathbb{Q}, +)$ نحو (\mathbb{R}, \times) .

تمارين تطبيقية:

تمرين 1:

نعرف في \mathbb{R}^2 جمع زوجين و جداء زوجين بما يلي:

$$(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$$

ونعتبر التطبيق $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$z = a + ib \rightarrow (a, b)$$

بين أن f تشاكل من $(\mathbb{C}, +)$ نحو $(\mathbb{R}^2, +)$

بين أن f تشاكل من (\mathbb{C}, \times) نحو (\mathbb{R}^2, \times)

← لنبين أن f تشاكل من $(\mathbb{C}, +)$ نحو $(\mathbb{R}^2, +)$.

$$z' = a' + ib' \text{ et } z = a + ib$$

$$f(z+z') = f(z) + f(z')$$

لدينا:

$$z+z' = (a+ib) + (a'+ib')$$

$$= (a+a') + i(b+b')$$

$$f(z+z') = (a+a', b+b')$$

$$= (a, b) + (a', b') = f(z) + f(z')$$

إذن:

إذن f تشاكل من $(\mathbb{C}, +)$ نحو $(\mathbb{R}^2, +)$.

← لنبين أن f تشاكل من (\mathbb{C}, \times) نحو (\mathbb{R}^2, \times) .

$$f(z \cdot z') = f(z) \cdot f(z')$$

$$z = a + ib \quad z' = a' + ib'$$

لدينا:

$$z \cdot z' = (a+ib) \cdot (a'+ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

إذن:

$$f(z \cdot z') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

ولدينا:

$$f(z) \cdot f(z') = (a, b) \cdot (a', b')$$

$$= (aa' - bb', ab' + a'b)$$

$$f(z \cdot z') = f(z) \cdot f(z')$$

ومنه f تشاكل من (\mathbb{C}, \times) نحو (\mathbb{R}^2, \times)

تمرين 2:

نعتبر المجموعة $A = \{f_{(a,b)} : x \rightarrow ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

ونعرف على \mathbb{R}^2 القانون T بمايلي

ونعتبر $(a,b)T(a',b') = (aa', ab'+b)$

$$\varphi : (A, \circ) \rightarrow (\mathbb{R}^2, T)$$

$$f_{(a,b)} \rightarrow (a, b)$$

بين أن φ تشاكل

يكون φ تشاكل من (A, \circ) نحو (\mathbb{R}^2, T) إذا فقط إذا كان:

$$(\forall (f_{(a,b)}, f_{(a',b')}) \in A^2):$$

$$\varphi(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}) = \varphi(f_{(a,b)}) T \varphi(f_{(a',b')})$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')})(x) = f_{(a,b)}(f_{(a',b')}(x))$$

$$= f_{(a,b)}(a'x + b')$$

$$= a(a'x + b') + b$$

$$= aa'x + ab' + b$$

إذن:

$$\varphi(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}) = (aa', ab' + b)$$

$$= (a, b) T (a', b')$$

$$= \varphi(f_{(a,b)}) T \varphi(f_{(a',b')})$$

ومنه: φ تشاكل

2- خاصيات:

خاصية 1

ليكن f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T)

لدينا $f(E)$ جزء مستقر من (F, T) .

برهان:

$$(E, *) \rightarrow (F, T) : f \text{ تشاكل.}$$

لنبين أن $f(E)$ مستقر من (F, T)

(* لدينا $f(E) \subset F$)

(* ليكن $x, y' \in f(E)$ من $f(E)$. لنبين أن: $xTy' \in f(E)$.

لدينا $x, y' \in f(E)$ من $f(E)$. إذن يوجد x, y من E بحيث:

$$x' = f(x) \text{ و } y' = f(y)$$

إذن:

$$xTy' = f(x)Tf(y) = f(x * y)$$

ولدينا $x * y \in E$

$$xTy' \in f(E) \text{ يعني } f(x * y) \in f(E)$$

إذن $f(E)$ مستقر من (F, T) .

ملاحظة:

إذا كان f تشاكل من $(E, *)$ نحو (F, T) فإن T قانون تركيب

داخلي في $f(E)$.

الزمرة: (IV) Groupe

1- تعريف:

لتكن G مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ نقول إن $(G, *)$ زمرة إذا فقط إذا تحققت الشروط التالية:
 ← " " * " تجميعي في G
 ← " " * " يقبل عنصرا محايدا.
 ← كل عنصر من G يقبل مائثلا.

ملاحظات:

ليكن $(G, *)$ زمرة.
 ← إذا كان " " * " تبادلي، نقول إن $(G, *)$ زمرة تبادلية أو أبيلية (Abelian).
 ← إذا كانت G منتهية. نقول إن $(G, *)$ زمرة منتهية.
 ← يمكن أن نرسم للقانون " " * " بالجمع " + " (دون أن يكون هو الجمع المعتاد) وفي هذه الحالة نرسم للعنصر المحايد ب " 0 ". ونرسم لمائث x ب $-x$.
 ← يمكن أن نرسم للقانون " " * " بالضرب " . " (دون أن يكون هو الضرب الاعتيادي). وفي هذه الحالة نرسم للعنصر المحايد ب 1. ولمائث x ب x^{-1} .

2 - أمثلة:

← كل من $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ زمرة تبادلية.
 ← كل من (\mathbb{Q}^*, \times) , (\mathbb{R}^*, \times) , (\mathbb{C}^*, \times) زمرة تبادلية.
 ← كل من $(V_2, +)$ و $(V_3, +)$ زمرة تبادلية.
 ← $(F(X, \mathbb{R}), +)$ زمرة تبادلية.
 ← $(B(E, E), o)$ (مجموعة التبادلات)، زمرة غير تبادلية.
 ← كل من (T, o) , (H_o, o) , (R_o, o) زمرة تبادلية.
 ← $(P(E), \cup)$ و $(P(E), \cap)$ ليسا زميرتين.
 ← $(P(E), \Delta)$ زمرة تبادلية.

3- خاصيات

خاصية (1):

لتكن $(G, *)$ زمرة. لدينا ما يلي:
 ← " " * " تجميعي.
 ← " " * " يقبل عنصرا محايدا.
 ← كل عنصر x من G يقبل مائثلا x' في G .
 ← كل عنصر a من G منتظم (لأنه يقبل مائثلا).
 ← $(\forall (a, x, y) \in G^3) a * x = a * y \Leftrightarrow x = y$
 $x * a = y * a \Leftrightarrow x = y$
 نلخص هذه الخاصية بقولنا: يمكن الاختزال في زمرة وبدون شروط.

خاصية (2):

لتكن $(G, *)$ زمرة. وليكن a و b من G .
 كل من المعادلتين: $a * x = b$ (1) و $x * a = b$ (2) تقبل حلا وحيدا في G .

برهان:

خاصية (2):

ليكن $f: (E, *) \rightarrow (F, T)$ تشاكلا.
 (*) إذا كان $*$ تجميعي في E فإن T تجميعي في $f(E)$.
 (*) إذا كان $*$ تبادلي في E فإن T تبادلي في $f(E)$.
 (*) إذا كان l * عنصر محايد e في E فإن T يقبل مائثلا في $(f(E), T)$ هو $f(x')$ يعني: $(f(x))' = f(x')$.

برهان:

$f: (E, *) \rightarrow (F, T)$ تشاكل.
 ← نفترض أن $*$ تجميعي في E . لنبين أن T تجميعي في $f(E)$.
 ليكن x', y', z' من $f(E)$. لنبين أن $x'T(y'Tz') = (x'Ty')Tz'$.
 لدينا $x', y', z' \in f(E)$. إذن يوجد x, y, z من E بحيث:
 $x' = f(x); y' = f(y); z' = f(z)$
 إذن:

$$\begin{aligned} (x'Ty')Tz' &= (f(x)Tf(y))Tf(z) \\ &= f(x * y)Tf(z) \\ &= f[(x * y) * z] \\ &= f[x * (y * z)] = f(x)Tf(y * z) \\ &= f(x)T(f(y)Tf(z)) \\ (x'Ty')Tz' &= x'T(y'Tz') \end{aligned}$$

ومنه T تجميعي في (E)
 + بنفس الطريقة نبين أن T تبادلي في $f(E)$.
 + نفترض أن e عنصر محايد في $(E, *)$. لنبين أن $f(e)$ عنصر محايد في $f(E)$.
 ليكن x' من $f(E)$. لنبين أن: $x'Tf(e) = f(e)Tx' = x'$.
 لدينا $x' \in f(E)$ إذن يوجد x من E بحيث $x' = f(x)$.
 بنفس الطريقة نجد: $f(e)Tx' = x'$.
 إذن $f(e)$ هو العنصر المحايد في $f(E)$.
 ← نفترض أن x' هو مائث x في $(E, *)$. لنبين أن $f(x')$ هو مائث $f(x)$ في $(f(E), T)$.
 يعني: $f(x)Tf(x') = f(x')Tf(x) = f(e)$
 لدينا:
 $f(x)Tf(x') = f(x * x') = f(e)$
 $f(x')Tf(x) = f(x' * x) = f(e)$
 إذن $f(x')$ هو مائث $f(x)$ في $(f(E), T)$.

ملاحظة:

(1) إذا كان $f: (E, *) \rightarrow (F, T)$ تشاكلا فإن f ينقل خاصيات $*$ في E إلى T في $f(E)$.
 وإذا كان f شمولي فإن $f(E) = F$ وبالتالي f ينقل خاصيات $*$ في E إلى T في F .
 (2) نقول إن مجموعتين F و E متشاكلتان إذا فقط إذا وجد تشاكل من E نحو F .
 - ونقول إن F و E متشاكلتان تقابليا إذا فقط إذا وجد تشاكل تقابلي من E نحو F .

برهان:

(* لدينا $H \neq \emptyset$ لأنها تضم العنصر المحايد.
* لنبين أن e هو العنصر المحايد في H :
ليكن e' العنصر المحايد في H .
لنبين أن $e = e'$:
ليكن $x \in H$

لدينا $e'x = x$ لأن: $x * e' = x$ (1)

ولدينا $H \subset G$ إذن $x \in G$. ولدينا e هو العنصر المحايد في G إذن

$$(2) x * e = x$$

من (1) و (2) نجد: $x * e' = x * e$
إذن: $e' = e$

إذن e هو العنصر المحايد في H .

(* ليكن $x \in H$ و x' مماثل x في G .

لنبين أن x' ينتمي ل H .

ليكن x'' مماثل x في H .

$$\text{لدينا: } \begin{cases} x * x' = e \\ x * x'' = e' = e \end{cases} \text{ إذن } x * x' = x * x''$$

$$\text{إذن } x' = x''$$

ومنه $x' \in H$

(* ليكن x و y من H و y' مماثل y في G .

لنبين أن $x * y' \in H$.

لدينا $y \in H$. ومن خلال ما سبق $y' \in H$.

$$\text{إذن: } \begin{cases} x \in H \\ y' \in H \end{cases} \text{ إذن } x * y' \in H \text{ لأن } H \text{ جزء مستقر من } G.$$

خاصية (2):

ليكن $(G, *)$ زمرة. و H جزء من G .

تكون H زمرة جزئية ل $(G, *)$ إذا وفقط إذا كان:

$$(*) H \neq \emptyset$$

$$(*) (\forall (x, y) \in H^2) x * y' \in H$$

حيث y' مماثل y في G .

برهان:

(* نفترض أن H زمرة جزئية ل $(G, *)$.

من خلال الخاصية السابقة لدينا:

$$H \neq \emptyset$$

و $(\forall (x, y) \in H^2) x * y' \in H$ مع y' مماثل y في G .

(* نفترض أن

$$(II) (\forall (x, y) \in H^2) x * y' \in H \text{ و } H \neq \emptyset$$

لنبين أن H زمرة جزئية ل $(G, *)$.

1- لدينا $H \neq \emptyset$ إذن يوجد $a \in H$:

$$\text{لدينا } (a, a) \in H^2$$

إذن من خلال (II): $a * a' \in H$

$$e \in H \text{ يعني:}$$

2- ليكن $x \in H$.

لدينا $(e, x) \in H^2$ إذن: $e * x' \in H$

$$x' \in H \text{ يعني:}$$

$$\text{إذن } (\forall x \in H): x' \in H$$

$$(1) \Leftrightarrow a * x = b$$

$$\Leftrightarrow a' * a * x = a' * b$$

$$\Leftrightarrow e * x = a' * b$$

$$\Leftrightarrow x = a' * b$$

إذن (1) تقبل حلا وحيدا في G هو $a' * b$
- بنفس الطريقة نجد أن (2) تقبل حلا وحيدا في G : $b * a'$

استنتاج:

ليكن $(G, *)$ زمرة. وليكن $a \in G$.

نعتبر التطبيق $f: G \rightarrow G$ $g: G \rightarrow G$

$$x \rightarrow x * a \quad x \rightarrow a * x$$

التطبيقان f و g تقابلان.

4- زمرة جزئية: Sous - groupe

(a) تعريف:

لتكن $(G, *)$ زمرة. و H جزء مستقر من $(G, *)$.

نقول إن $(H, *)$ زمرة جزئية ل $(G, *)$ أو H زمرة جزئية ل G :

إذا وفقط إذا كان $(H, *)$ زمرة.

(b) أمثلة:

← $(\mathbb{Q}, +)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{R}, +)$.

← (\mathbb{R}^*, \times) زمرة جزئية ل (\mathbb{C}^*, \times) .

← لتكن $B(P, P)$ مجموعة تقابلات المستوى.

كل من $(R_o, o), (H_o, o), (T, o)$ زمرة جزئية ل $(B(P, P), o)$.

← ليكن $(G, *)$ زمرة عنصرها المحايد e .

لدينا $(\{e\}, *)$ زمرة جزئية ل $(G, *)$.

و $(G, *)$ زمرة جزئية ل $(G, *)$.

وكل زمرة جزئية H تخالف هتين الزمرتين تسمى زمرة جزئية فعلية (non trivial)

ملاحظة:

يمكن لزمرة G أن تكون غير تبادلية لكن الزمرة الجزئية تبادلية.

- مثال: $(B(P, P), o)$ غير تبادلية.

لكن (T, o) تبادلية.

(c) خاصيات:

خاصية (1):

لتكن $(G, *)$ زمرة عنصرها المحايد e ولتكن H زمرة جزئية ل $(G, *)$.

لدينا ما يلي:

$$\leftarrow H \neq \emptyset$$

← e هو العنصر المحايد في H .

← إذا كان $x \in H$ و x' مماثل x في G , فإن $x' \in H$.

$$\leftarrow (\forall (x, y) \in H^2): x * y' \in H$$

حيث y' مماثل y في G .

حيث x' هو مماثل x في G .

3- ليكن $x, y \in H$

من خلال ما سبق نستنتج أن $y' \in H$.

إذن $(x, y') \in H^2$ ومن (III) نجد: $x*(y')' \in H$

يعني: $x*y \in H$

إذن H جزء مستقر.

ومنه القانون * قانون تركيب داخلي في H .

4- لنبين أن $(H, *)$ زمرة:

- تجميعي في G إذن * تجميعي في H

- $e \in H$ و $e*x = x*e = x$: $(\forall x \in H)$

إذن e العنصر المحايد في H .

- ليكن $x \in H$

لدينا $x \in G$ إذن x يقبل مماثل x' في G . يعني:

$x*x' = x'*x = e$ ومن خلال ما سبق لدينا $x' \in H$.

إذن x' هو مماثل x في H . وبالتالي $(H, *)$ زمرة جزئية.

ملاحظة:

1- إذا رمزنا للقانون " * " ب " + " فإن الخاصية المميزة تصبح:

$H \neq \emptyset$

$(\forall (x, y) \in H^2) x - y \in H$

* إذا رمزنا للقانون " * " ب " \times " فإن الخاصية المميزة تصبح:

$H \neq \emptyset$

$(\forall (x, y) \in H^2) x.y^{-1} \in H$

2- لتكن $(G, *)$ زمرة و $H \subset G$

تكون $(H, *)$ زمرة جزئية ل $(G, *)$ إذا وفقط إذا كان:

$H \neq \emptyset$ (*)

$(\forall (x, y) \in H^2) x + y \in H$ (*)

$(\forall x \in H) : x' \in H$ (*) (x' مماثل x في G).

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

نعتبر المجموعة: $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

بين أن (U, \times) زمرة تبادلية.

(*) لنبين أن (U, \times) زمرة تبادلية:

نعلم أن (\mathbb{C}^*, \times) زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن (U, \times) زمرة جزئية ل (\mathbb{C}^*, \times) .

← لدينا:

$$(\forall z \in U) : |z| = 1$$

إذن: $z \neq 0$

إذن: $z \in \mathbb{C}^*$

إذن: $U \in \mathbb{C}^*$

← لدينا $U \neq \emptyset$ (لأن $1 \in U$).

← ليكن $z_1, z_2 \in U$. لنبين أن: $z_1 \times z_2^{-1} \in U$

$$|z_1 \times z_2^{-1}| = |z_1| \times \left| \frac{1}{z_2} \right|$$

لدينا:

$$= |z_1| \times \frac{1}{|z_2|} = 1$$

لأن $|z_1| = 1$

و $|z_2| = 1$

إذن: $z_1 \times z_2^{-1} \in U$

وبالتالي فإن U زمرة جزئية ل (\mathbb{C}^*, \times) .

ومنه فإن (U, \times) زمرة تبادلية.

تمرين (2):

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نعتبر المجموعة:

$$n\mathbb{Z} = \{nk / k \in \mathbb{Z}\}$$

بين أن $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية.

(*) لنبين أن: $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية.

لدينا $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. ونعلم أن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية.

إذن يكفي أن نبين أن $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Z}, +)$:

← لدينا $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$ (لأن $0 \in n\mathbb{Z}$).

← ليكن $x, y \in n\mathbb{Z}$. لنبين أن: $x - y \in n\mathbb{Z}$.

لدينا $x, y \in n\mathbb{Z}$ إذن يوجد k_1 و k_2 بحيث:

$$x = nk_1 \text{ و } y = nk_2$$

إذن:

$$x - y = nk_1 - nk_2 = n(k_1 - k_2)$$

$$= nk_3$$

مع $k_3 = k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$

إذن: $x - y \in n\mathbb{Z}$

ومنه $(\forall (x, y) \in n\mathbb{Z}^2) : x - y \in n\mathbb{Z}$

وبالتالي $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية ل $(\mathbb{Z}, +)$.

إذن $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية.

تمرين (3):

لتكن $(G, .)$ زمرة عنصرها المحايد e .

ليكن $a \in G$

نضع: $C_a = \{x \in G / a.x = x.a\}$ (centralisateur de a)

$$Z(G) = \{x \in G / (\forall y \in G) : x.y = y.x\}$$

(centre de G)

بين أن C_a و $Z(G)$ زمرتان جزئيتان ل $(G, .)$.

(*) لنبين أن: C_a زمرة جزئية ل $(G, .)$:

← لدينا: $a.e = e.a = a$

إذن: $e.a = a.e$ إذن $e \in C_a$

ومنه: $C_a \neq \emptyset$

← ليكن $x, y \in C_a$. لنبين أن: $x.y^{-1} \in C_a$

يعني: $a.(x.y^{-1}) = (x.y^{-1}).a$

لدينا $x, y \in C_a$ إذن:

تمرين:

لتكن $(G, .)$ زمرة.

نعتبر التطبيق: $f_a : G \rightarrow G$

$$x \rightarrow a.x.a^{-1}$$

(1) بين أن f_a تشاكل تقابلي من $(G, .)$ إلى $(G, .)$

(2) نعتبر المجموعة:

$$F = \{f_a / a \in G\}$$

(a) بين أن "o" قانون تركيب داخلي في F .

(b) نعتبر التطبيق

$$a \rightarrow f_a$$

← بين أن h تشاكل شمولي من $(G, .)$ نحو (F, o)

← استنتج أن (F, o) زمرة.

(1) * لنبين أن f_a تشاكل من $(G, .)$ نحو $(G, .)$

ليكن x, y من G .

لنبين أن: $f_a(x.y) = f_a(x).f_a(y)$

$$f_a(x.y) = a.x.y.a^{-1} \quad \text{لدينا:}$$

$$= a.x.e.y.a^{-1}$$

$$= a.x.a^{-1}.a.y.a^{-1}$$

$$= (a.x.a^{-1}).(a.y.a^{-1})$$

$$= f_a(x).f_a(y)$$

إذن f_a تشاكل.

(* لنبين أن f_a تقابل:

ليكن $y \in G$. لنبحث عن x من G بحيث: $f_a(x) = y$

$$f_a(x) = y \Leftrightarrow a.x.a^{-1} = y \quad \text{لدينا:}$$

$$\Leftrightarrow a^{-1}.a.x.a^{-1} = a^{-1}.y.a$$

$$\Leftrightarrow e.x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a$$

$$\Leftrightarrow x.a^{-1}.a = a^{-1}.y.a$$

$$\Leftrightarrow x = a^{-1}.y.a \in G$$

إذن كل عنصر y من G يقبل سابق وحيد $x = a^{-1}.y.a$

إذن f_a تقابل.

ومنه f_a تشاكل تقابلي من $(G, .)$ نحو $(G, .)$.

(2) لنبين أن "o" قانون تركيب داخلي في F .

ليكن $f_a, f_b \in F$. لنبين أن $f_a \circ f_b \in F$

ليكن $x \in G$. لنحسب $f_a \circ f_b(x)$

$$f_a \circ f_b(x) = f_a(f_b(x))$$

$$= f_a(b.x.b^{-1})$$

$$= a.b.x.b^{-1}.a^{-1} = a.b.x.(ab)^{-1} = f_{ab}(x)$$

$$(\forall x \in G): f_a \circ f_b(x) = f_{ab}(x) \quad \text{إذن:}$$

$$\begin{cases} x.a = a.x & (1) \\ y.a = a.y & (2) \end{cases}$$

لدينا من (2): $(y.a)^{-1} = (a.y)^{-1}$

يعني:

$$a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1}$$

إذن:

$$\begin{cases} x.a = a.x \\ a^{-1}.y^{-1} = y^{-1}.a^{-1} \end{cases}$$

$$x.a.a^{-1}.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1} \quad \text{إذن:}$$

$$x.e.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1} \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1} = a.x.y^{-1}.a^{-1} \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.a^{-1}.a \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1}.e \quad \text{يعني:}$$

$$x.y^{-1}.a = a.x.y^{-1} \quad \text{يعني:}$$

$$(\forall (x, y) \in C_a^2) x.y^{-1} \in C_a \quad \text{إذن:}$$

ومنه C_a زمرة جزئية ل $(G, .)$

(* لنبين أن $Z(G)$ زمرة جزئية ل $(G, .)$:

← لدينا: $(\forall y \in G): e.y = y.e = y$

$$e \in Z(G) \quad \text{إذن}$$

← ليكن a, b من $Z(G)$. لنبين أن: $a.b^{-1} \in Z(G)$

$$(\forall y \in G): (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1}) \quad \text{يعني:}$$

$$(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1}) \quad \text{ليكن } y \in G \text{ لنبين أن:}$$

- لدينا a, b من $Z(G)$. إذن:

$$\begin{cases} a.y = y.a & (1) \\ b.y = y.b & (2) \end{cases}$$

وبنفس الطريقة السابقة نجد:

$$(a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

إذن:

$$(\forall y \in G): (a.b^{-1}).y = y.(a.b^{-1})$$

$$a.b^{-1} \in Z(G) \quad \text{إذن}$$

ومنه $Z(G)$ زمرة جزئية ل $(G, .)$.

5- تشاكل زمرة:

خاصية:

لتكن $(G, *)$ زمرة. E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي T . و

$$f : (G, *) \rightarrow (E, T)$$

لدينا ما يلي:

(* $(f(G), T)$ زمرة.

(* إذا كانت $(G, *)$ زمرة تبادلية فإن $(f(G), T)$ زمرة تبادلية.

(* إذا كان f تشاكل شمولي، فإن: $f(G) = E$ إذن: (E, T) زمرة.

نقول إن التشاكل يحول زمرة إلى زمرة.

2) تعريف حلقة:

تعريف:

لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T نقول إن $(A, *, T)$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- (*) $(A, *)$ زمرة تبادلية.
- (*) T تجميعي.
- (*) T توزيعي بالنسبة ل $*$

ملاحظات:

- (*) إذا كان القانون T تبادلي. نقول إن الحلقة A تبادلية.
- (*) إذا كان للقانون T عنصر محايد، نقول إن الحلقة A وحادية.
- (*) نرسم عادة للقانون $*$ ب "+" وللقانون T ب "×" ونرمز في هذه الحالة للعنصر المحايد ل $*$ ب 0 أو 0_A ويسمى صفر حلقة. ونرمز للعنصر المحايد ل T ب 1 أو 1_A .

(3) أمثلة:

- 1 كل من $(\mathbb{C}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة تبادلية وحادية.
- 2 $(F(X, \mathbb{R}), +, \times)$ حلقة تبادلية وحادية.

(4) خاصيات:

خاصية (1):

لتكن $(A, *, T)$ حلقة صفرها e

لدينا: $(\forall a \in A): aTe = eTa = e$

ملاحظة:

إذا رمزنا ل $(A, *, T)$ ب $(A, +, \times)$ الخاصية تصبح:

$$(\forall a \in A): a \times 0 = 0 \times a = 0$$

برهان:

لدينا: $aT(e * e) = aTe$ (لأن $e * e = e$)

يعني: $(aTe) * (aTe) = aTe$

يعني: $(aTe) * (aTe) = (aTe) * e$

يعني: $aTe = e$ (لأن $(A, *)$ زمرة)

لدينا: $aTe = e$

وبنفس الطريقة نبين أن $eTa = e$

ومنه $eTa = aTe = e$

خاصية (2):

لتكن $(A, *, T)$ صفرها e

نرمز ل a' لمماثل a في $(A, *)$.

لدينا: $(\forall (a, b) \in A^2): aTb' = a'Tb = (aTb)'$

ملاحظة:

إذا رمزنا ل $(A, *, T)$ ب $(A, +, \times)$ الخاصية تصبح:

$$(\forall (a, b) \in A^2): a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

برهان:

لنبين أن: $(aTb)' = aTb'$

يعني: $(aTb) * (aTb') = e$ (لأن $*$ تبادلي).

لدينا: $f_a of_b = f_{ab}$

لدينا: $\begin{cases} a \in G \\ b \in G \end{cases}$ إذن $ab \in G$

لدينا $f_{ab} \in F$

وبالتالي $(\forall (f_a, f_b) \in F^2): f_a of_b \in F$

لدينا "o" قانون تركيب داخلي في F .

(b) لنبين أن h تشاكل شمولي من $(G, .)$ نحو (F, o) .

← ليكن a و b من G . لنبين أن: $h(a.b) = h(a)oh(b)$

لدينا: $h(a.b) = f_{ab} = f_a of_b = h(a)oh(b)$

لدينا h تشاكل.

← ولدينا h شمولي لأن كل عنصر f_a من F له سابق على الأقل a من G .

ومنه h تشاكل شمولي من $(G, .)$ نحو (F, o) .

(*) لنبين أن (F, o) زمرة.

- لدينا $(G, .)$ زمرة.

- و h تشاكل شمولي من $(G, .)$ نحو (F, o) .

لدينا (F, o) زمرة.

(V) الحلقة:

(1) توزيعية قانون بالنسبة لآخر.

تعريف:

لتكن E مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T .

نقول إن T توزيعي بالنسبة ل $*$ إذا وفقط إذا كان:

$$(1) (\forall (x, y, z) \in E^3) xT(y * z) = (xTy) * (xTz)$$

$$(2) (x * y)Tz = (xTz) * (yTz)$$

ملاحظة:

(*) إذا كان القانون T تبادلي فإن إحدى الخاصيتين (1) أو (2) كافية.

(*) إذا تحققت الخاصية (1) نقول إن T توزيعي بالنسبة ل $*$ على اليمين.

أمثلة:

1- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في كل من $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$.

2- الجمع ليس توزيعيا بالنسبة للضرب:

$$x + (y \times z) \neq (x + y) \times (x + z)$$

3- الاتحاد توزيعي بالنسبة للتقاطع. والتقاطع توزيعي بالنسبة للاتحاد في

$P(E)$.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4- الضرب توزيعي بالنسبة للجمع في $F(X, \mathbb{R})$

- لدينا:

$$(aTb) * (aTb') = aT(b * b') \\ = aTe \\ = e$$

$$(aTb)' = aTb' \quad \text{إن}$$

$$(aTb)' = a'Tb \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

(5) العناصر القابلة للمماثلة:

تعريف:

لتكن $(A, *, T)$ حلقة واحدة وحدتها e .

نقول إن عنصرا a من A قابل للمماثلة أو يقبل مقلوبا إذا كان له مماثل بالنسبة للقانون T في A .

خاصية:

لتكن $(A, *, T)$ حلقة واحدة وحدتها e .

ولتكن U مجموعة العناصر القابلة للمماثلة.

لدينا: (U, T) زمرة.

برهان:

- لدينا $U \neq \emptyset$ لأن $e \in U$.

- لنبين أن T قانون تركيب داخلي في U .

ليكن $x, y \in U$ من U لنبين أن $(xTy) \in U$.

لدينا $xTy \in U$ من U إن يقبلان مماثلين x'' و y'' في (A, T) .

إن xTy له مماثل هو $y''Tx''$.

إن $xTy \in U$

ومنه T قانون تركيب داخلي في U .

- لدينا T تجميعي في A . إن تجميعي في U .

- لدينا: $(\forall a \in U): \varepsilon Ta = aT\varepsilon = a$

و $e \in U$

إن e هو العنصر المحايد في U .

- ليكن $x \in U$ لنبين أنه يقبل مماثلا x'' في (U, T) .

لدينا $x \in U$ إن يقبل مماثلا x'' في (A, T) .

ولدينا x'' يقبل مماثلا هو x إن $x'' \in U$

إن x يقبل مماثلا هو x'' في (U, T) .

وبالتالي (U, T) زمرة.

(6) قواسم الصفر في حلقة:

مثال:

نعتبر الحلقة $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ صفرها: $\theta: x \rightarrow 0$

ونعتبر الدالتين: $f: x \rightarrow |x| - x$

و: $g: x \rightarrow |x| + x$

لدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}): (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$= (|x| - x)(|x| + x)$$

$$= |x|^2 - x^2$$

$$= x^2 - x^2 = 0 = \theta(x)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f.g = \theta \quad \text{إن:}$$

$$f \neq \theta, \quad g \neq \theta, \quad f.g = \theta$$

نقول إن f و g قاسمين للصفر في الحلقة $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

تعريف (1):

ليكن $(A, *, T)$ حلقة صفرها 0_A

نقول إن عنصرا a من A قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان:

$$aTb = 0_A \quad \text{حيث: } b \neq 0_A$$

تعريف (2):

لتكن $(A, *, T)$ حلقة

نقول إن الحلقة $(A, *, T)$ كاملة (intègre) إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر.

ملاحظة:

نعتبر الحلقة $(A, +, \times)$ صفرها 0_A .

1- يكون a قاسم للصفر إذا كان:

$$a \times b = 0_A \quad \text{حيث } b \neq 0_A$$

2- تكون $(A, *, T)$ كاملة إذا وفق إذا كان:

$$(\forall (x, y) \in A^2) \begin{cases} x \neq 0_A \\ y \neq 0_A \end{cases} \Rightarrow x.y \neq 0_A$$

يعني:

$$(\forall (x, y) \in A^2) x.y = 0_A \Rightarrow \begin{cases} x = 0_A \\ \text{أو} \\ y = 0_A \end{cases}$$

أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{C}, +, \times); (\mathbb{R}, +, \times); (\mathbb{Q}, +, \times); (\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة كاملة.

2- $(F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$ حلقة غير كاملة.

(7) حلقتان هامتان:

(a) حلقة المصفوفات المربعة:

← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 2:

تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 2 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{حيث } d, c, b, a \text{ من } \mathbb{R}$$

ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات ب $M_2(\mathbb{R})$

- نعرف على $M_2(\mathbb{R})$ الجمع والضرب كما يلي:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \quad (\leftarrow)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix} \quad (\leftarrow)$$

خاصية:

$(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة غير تبادلية وواحدية.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ صفرها المصفوفة المنعدمة:}$$

$$\text{وحدتها المصفوفة الوحدة: } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ وغير كاملة.}$$

← حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة 3:

تعريف:

نسمي مصفوفة مربعة من الرتبة 3 بمعاملات حقيقية كل جدول على شكل:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ حيث } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

ونرمز لمجموعة هذه المصفوفات بـ $M_3(\mathbb{R})$

- نعرف الجمع والضرب في $M_3(\mathbb{R})$ بما يلي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

باستعمال الترميز يمكن أن نعرف الجمع والضرب كما يلي:
نعتبر المصفوفة:

$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} ; \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

(* لدينا $A+B$ هي المصفوفة $S = (S_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$

$$\text{حيث: } S_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

(* ولدينا $A.B$ هي المصفوفة $C = (C_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$

$$\text{حيث } C_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}$$

مثال:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

خاصية:

$(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة غير تبادلية، غير كاملة وواحدية صفرها المصفوفة

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ وحدتها } 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ المنعدمة:}$$

(b) الحلقة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

سبق وأن عرفنا الجمع والضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ كما يلي:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

خاصية:

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة تبادلية واحدية صفرها $\overline{0}$ وحدتها $\overline{1}$.

ملاحظة:

(* نعتبر $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ لدينا:

$$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$$

$$\overline{2} \neq \overline{0} \text{ و } \overline{3} \neq \overline{0}$$

و إذن $\overline{2}$ و $\overline{3}$ قاسمان للصفر.

إذن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة غير كاملة.

(* نعتبر $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حيث n أولي.

$$(\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x \cdot y} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow xy \equiv 0[n]$$

$$\Rightarrow n/xy$$

$$\Rightarrow n/x \text{ أو } n/y$$

$$\Rightarrow x \equiv 0[n] \text{ أو } y \equiv 0[n]$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \overline{0} \text{ أو } \overline{y} = \overline{0}$$

إذن $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة كاملة.

(* نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حيث n غير أولي.

إذن n يقبل قاسم فعلي موجب n_1 .

$$n = n_1 + n_2 \text{ يعني:}$$

n_1 قاسم فعلي موجب إذن n_2 قاسم فعلي موجب.

لدينا $1 < n_1 < n$ إذن $n \times n_1$ يعني $n_1 \not\equiv 0[n]$

و $1 < n_2 < n$ و $n \times n_2$ و $n_2 \not\equiv 0[n]$

يعني: $\overline{n_1} \neq \overline{0}$ و $\overline{n_2} \neq \overline{0}$

$$\text{ولدينا: } \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \overline{n}$$

$$\text{يعني: } \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \overline{n}$$

$$\text{يعني: } \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = \overline{0}$$

إذن $\overline{n_1}$ و $\overline{n_2}$ قاسمان للصفر.

ومنه: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة غير كاملة.

خاصية:

الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ كاملة إذا وفقط إذا كان n أولي.

تمرين:

نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ ، $n \in \mathbb{N}^*$

حدد العناصر القابلة للمماثلة.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ - نعتبر المصفوفة}$$

لنتحقق هل A تقبل مقلوبا.

$$A.A' = A'.A = I \text{ : نبحث عن } A' = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

لدينا:

$$A.A' = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ c+d=0 \\ a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases}$$

وهذا مستحيل.

إذن A لا تقبل مقلوبا A' .

ومنه $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ ليس جسما.

وبنفس نجد أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ ليس جسما.

(3) خاصيات:

خاصية (1):

ليكن $(K, +, \times)$ جسما.

لدينا كل عنصر من $K - \{0_k\}$ منتظم بالنسبة للضرب.

$$(\forall a \in K - \{0_k\})(\forall (x, y) \in K^2): \text{ يعني:}$$

$$\begin{cases} a.x = a.y \Rightarrow x = y \\ x.a = y.a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

خاصية (2):

ليكن $(K, +, \times)$ جسما.

لدينا:

$$(\forall (x, y) \in K^2): x.y = 0_k \Rightarrow x = 0_k \text{ أو } y = 0_k$$

استنتاج: كل جسم هو حلقة كاملة.

خاصية (3):

ليكن $(K, +, \times)$ جسما.

نعتبر المعادلة $a \times x = b$

(* إذا كان $a \neq 0_k$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا $x = a^{-1}b$.

(* إذا كان $a = 0_k$ و $b \neq 0_k$ فإن المعادلة ليس لها حل.

(* إذا كان $a = 0_k$ و $b = 0_k$ فإن $S = K$

نفس الشيء بالنسبة للمعادلة $x \times a = b$.

- لدينا:

$$(\bar{x} \text{ قابلة للمماثلة}) \Leftrightarrow (\exists x' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}): \bar{x}.x' = \bar{1}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x' \in \mathbb{Z}): x.x' \equiv 1[n]$$

$$\Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}): xx' = 1 + nk$$

$$\Leftrightarrow (\exists x', k \in \mathbb{Z}): xx' - nk = 1$$

$$\Leftrightarrow x \wedge n = 1$$

إذن مجموعة العناصر التي تقبل مقلوبا هي:

$$U = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} / x \wedge n = 1\}$$

ملاحظة:

لدينا (U, \times) زمرة تبادلية.

(VI) الجسم: Corps

(1) تعريف:

لنكن k مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و T .

نقول إن $(K, *, T)$ جسم إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$(K, *, T)$ حلقة واحدة.

$*$ كل عنصر يخالف صفر الحلقة يقبل مائلا بالنسبة ل T .

ملاحظة:

1- إذا كان القانون T تبادلي نقول إن الجسم K تبادلي.

2- يكون $(K, *, T)$ جسما إذا وفقط إذا كان:

$(K, *)$ زمرة.

$(K - \{0_k\}, T)$ زمرة.

T توزيعي بالنسبة ل $*$.

(2) أمثلة:

1- كل من $(\mathbb{C}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$ جسم تبادلي.

2- نعتبر الحلقة $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ حيث p أولي.

لنبين أنها جسم.

- لدينا $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدة.

- ليكن $\bar{x} \neq \bar{0}$

يعني $x \neq 0[p]$ يعني $p \times x$

وبما أن p أولي فإن $p \wedge x = 1$

إذن حسب Bezout يوجد U و V بحيث:

$$pu + xv = 1$$

$$\bar{p}.\bar{u} + \bar{x}.\bar{v} = \bar{1} \text{ يعني:}$$

$$\bar{x}.\bar{v} = \bar{1} \text{ يعني:}$$

إذن \bar{x} يقبل مائلا هو \bar{v} .

إذن كل عنصر $\bar{x} \neq \bar{0}$ يقبل مقلوبا.

ومنه $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ جسم.

خاصية:

إذا كان p أولي فإن $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ جسم تبادلي.

3- نعتبر الحلقة $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

- لدينا $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة.

تمارين تطبيقية:

تمرين (1):

$$L = \left\{ \begin{array}{l} f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow ax / a \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ نعتبر:}$$

بين أن: $(L, +, 0)$ جسم تبادلي.

تمرين (2):

$$E = \left\{ M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ نعتبر}$$

بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.