الدوال الأسية

ذ. محمد الكيال

الدالة اللوغاريتمية النبيرية

تعريف:

الدالة الأسية النبيرية هي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية النبيرية
و يرمز لها بالرمز : $\exp$
نضع لكل x من $\mathbb{R}$ $\qquad \exp(x) = e^x$

استنتاجات و خاصيات:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$	$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in \mathbb{R}$ $e^x \times e^y = e^{x+y}$ $(r \in \mathbb{Q}) \quad (e^x)^r = e^{rx}$ $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
$\forall x \in]0,+\infty[\quad e^{\ln x} = x$	
$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in]0;+\infty[$ $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y$	
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \qquad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ $e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$	

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x) = e^x$	$D_f = \mathbb{R}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in D_u\}$

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$	
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$	
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = +\infty$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^n e^x) = 0$	
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	

الاتصال:

الدالة $x \mapsto e^x$ متصلة على $\mathbb{R}$

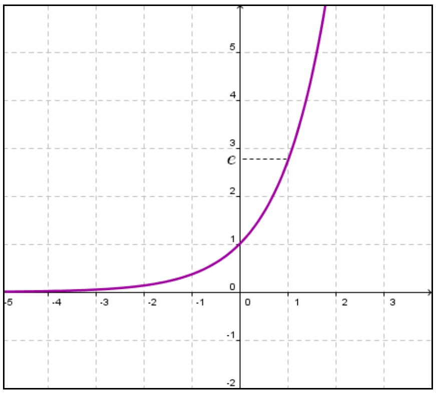
لتكن u دالة معرفة على مجال I
إذا كانت u متصلة على المجال I فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متصلة على المجال I

الاشتقاق:

الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

لتكن u دالة معرفة على مجال I
إذا كانت u قابلة للاشتقاق على المجال I فإن: الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I
ولدينا: $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)} \quad \forall x \in I$

التمثيل المبياني للدالة ln :



الدالة الأسية للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

تعريف:

الدالة العكسية للدالة ℓog_a تسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز لها بالرمز: $\exp_a$
نضع لكل x من $\mathbb{R}$ $\quad \exp_a(x) = a^x$

استنتاجات وخاصيات:

$a^x = e^{x \ln a} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\ell og_a(a^x) = x$	$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $a^x \times a^y = a^{x+y}$ $(a^x)^r = a^{rx} \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$a^{\ell og_a(x)} = a \quad \forall x \in]0;+\infty[$	
$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$	
$\forall y \in]0;+\infty[\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $a^x = y \Leftrightarrow x = \ell og_a(y)$	

نهايات و متفاوتات:

$0 < a < 1$	$a > 1$
$a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$	$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$
$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$
$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

المشتقة :

$$(a^x)' = (\ln a) \times a^x$$