I- عموميات:

1)- تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق u من $\mathbb{N}$ (أو جزء من $\mathbb{N}$) نحو $\mathbb{R}$ ، و لكل n من $\mathbb{N}$ العدد $u(n)$ يسمى الحد العام للمتتالية u و يرمز له ب u_n ، و يرمز للمتتالية u بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)_{n\geq 0}$.

العدد u_0 يسمى الحد الأول و u_1 الحد الثاني و . . . و u_n هو الحد من الرتبة $n+1$.

- **مثال01:**

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية التي حدها العام $u_n = \cos\dfrac{n\pi}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أحسب الحدود الستة الأولى ، و بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} : u_{n+6} = u_n$.

- **مثال02:**

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة ب : $u_0 = 9$ و $u_{n+1} = 2 + \dfrac{u_n}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- أحسب الحدود التالية u_1 و u_2 و u_3 و u_4 .

ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n = 3 + \dfrac{6}{3^n}$.

- **ملحوظة:**

يمكن تعريف متتالية عددية إما بصيغتها الصريحة : الحد العام u_n معبر عنه بدلالة n بمعنى أن $u_n = f(n)$ حيث f دالة عددية مجموعة تعريفها تتضمن $\mathbb{N}$.

أو بصيغة ترجعية : الحد العام u_n معبر عنه بدلالة الحد السابق له u_{n-1} و يجب أن يكون الحد الأول u_0 معلوما ، و يمكن التعبير عن u_n بدلالة u_{n-1} و u_{n-2} و يجب أن يكون u_0 و u_1 معلومين .

- **تمرين01:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 10$ و $u_1 = 7$

و لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

أ- أحسب u_2 و u_3 و u_4 ، ثم تظن الحد العام u_n بدلالة n مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

ب- هل $-2\,006$ حد من حدود المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ؟

2)- المتتاليات المكبورة و المصغورة:

- **تقديم:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}; u_n = \dfrac{3n - 4\sqrt{n} + 1}{n+1}$.

بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}; -1 < u_n < 3$.

- **تعريف:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية ، m و M عددين حقيقيين بحيث $m < M$.

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ مصغورة بالعدد m إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; u_n \geq m$

و مكبورة بالعدد M إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; u_n \leq M$

و نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية محدودة إذا كانت مكبورة و مصغورة .

- **ملحوظة:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حدودها موجبة فإنها مصغورة ب 0 ، و إذا كانت حدودها سالبة فإنها مكبورة ب 0 .

- **تمرين02:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 4u_n + 3}{2}; n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}; \dfrac{1}{3} < u_n < 1$ ، ثم إستنتج أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية محدودة .

- **خاصية01:**

تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية محدودة إذا و فقط إذا وجد α من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث : $\forall n\in\mathbb{N}; |u_n| \leq \alpha$.

- **تمرين03:**

بين أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) محدودتين ، حيث :

$a_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} / n\in\mathbb{N}$ و $b_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 1}\right) / n\in\mathbb{N}^*$.

- **تمرين04:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n+2}$.

بين بالترجع أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ مكبورة بالعدد $\sqrt{3}$ ، و مصغورة بالعدد 1

ثم إستنتج أنها محدودة .

3)- **المتتاليات الرتيبة:**

- **تعريف:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية .

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}\geq u_n$ و تزايدية قطعا إذا كان :

$\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}>u_n$.

و نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}\leq u_n$ و تزايدية قطعا إذا كان :

$\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}<u_n$.

تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية رتيبة إذا كانت تناقصية أو تزايدية .

- **أمثلة:**

نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) بحيث :

$\forall n\in\mathbb{N}^*: a_n=n+\frac{1}{n}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: b_n=n-4^n$.

بين أن (a_n) و (b_n) ر تيبتين قطعا .

- **خاصية02:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية حددوها موجبة قطعا .

تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا إذا و فقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; \frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ و تناقصية قطعا

إذا و فقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; \frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

و إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية حددوها سالبة قطعا فإن :

$(u_n)_{n\geq 0}$ تكون تزايدية قطعا إذا و فقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; \frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

و تناقصية قطعا إذا و فقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}; \frac{u_{n+1}}{u_n}>1$.

- **أمثلة:**

بين أن المتتاليات العددية (a_n) و (b_n) و (c_n) المعرفة ب :

$a_n=\frac{n}{3^n}$ و $b_n=\frac{n}{\sqrt{n+1}}$ و $c_n=\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

رتيبة قطعا .

- **تمرين05:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=-\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{1+u_n^2}; n\in\mathbb{N} \end{cases} .$$

أ- بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}; -1<u_n<0$.

ب- بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ رتيبة قطعا ، ثم إستنتج أنها مكبورة بالعدد $-\frac{1}{2}$.

- **خاصية03:**

لتكن (u_n) متتالية عددية بحيث $u_n=f(n)$ حيث f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $[k,+\infty[$ حيث $k\in\mathbb{N}$ ، إذا كانت f رتيبة قطعا على $[k,+\infty[$ فإن المتتالية $(u_n)_{n\geq k}$ رتيبة قطعا و لها نفس رتابة الدالة f على $[k,+\infty[$.

- **مثال:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $\forall n\in\mathbb{N}; u_n=\frac{-2n+5}{n+1}$.

لدينا $u_n=f(n)$ حيث $f(x)=\frac{-2x+5}{x+1}$ ، و بما أن المحددة $\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-7<0$

فإن الدالة f تناقصية قطعا على المجال $]-1,+\infty[$ و $\mathbb{R}_+\subset]-1,+\infty[$.

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا .

II- **المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية:**

1)- **المتتاليات الحسابية:**

- **تعريف:**

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r حيث $r\in\mathbb{R}^*$ إذا كان :

$\forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}=u_n+r$.

- **ملحوظة:**

- لما يكون : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n$ نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة .

- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = r$

إذن رتابة $(u_n)_{n\geq 0}$ مرتبطة بإشارة أساسها r : تكون تزايدية قطعا في حالة $r > 0$

و تناقصية قطعا في حالة $r < 0$.

- **مثال:**

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $u_n = -5n + 10$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = -5$ ، إذن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = -5$

و هي تناقصية قطعا لأن أساسها $r < 0$.

- **تمرين06:**

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة $(E): \cos x + \sin x = 0$

و بين أن حلولها الموجبة تكون حدود متتالية حسابية يجب تحديد أساسها r و حدها الأول .

- **خاصية04:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = u_0 + n \times r$

و بصفة عامة : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 : u_n = u_m + (n-m)r$.

- **تمرين07:**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+2v_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N}; u_n = 1 + \frac{1}{v_n} .$$

أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية و حدد أساسها r و حدها الأول u_0 .

ب- عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.

- **خاصية05:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية و $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$ مجموع n حدا الأولى

حيث $n \in \mathbb{N}^*$ فإن $S_n = n\dfrac{u_0 + u_{n-1}}{2}$ ، و بصفة عامة :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 / n < m; \quad u_n + u_{n+1} + ... + u_m = \frac{(m-n+1)\times(u_n + u_m)}{2}$$

- **ملحوظة:**

يمكن التعبير عن S_n بدلالة الحد الأول u_0 و الأساس r : $S_n = n \times u_0 + \dfrac{n(n-1)r}{2}$.

- **تمرين08:**

أ- حدد قيمة كل مجموع من المجموعين :

$S = 6 + 10 + 14 + ... + 1002$ و $T = 5 + 16 + 27 + ... + 2007$.

ب- أحسب بدلالة n المجموع : $X_n = 1 + 6 + 11 + ... + (5n+1)$ ، ثم إستنتج قيمة المجموع $X = 1 + 6 + 11 + ... + 2006$.

ج- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها $r = -2$ و مجموع حدودها السبعة عشر الأولى هو $S_{17} = 1513$.

فأحسب الحد الأول u_1 و الحد السابع عشر u_{17} .

حل في المجموعة $\mathbb{N}$ المعادلة : $S_n = 0$.

- **خاصية06:**

تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان : $\forall n \in \mathbb{N}; \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2} = u_{n+1}$

- **تمرين09:**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ بحيث :

$$\begin{cases} v_0 = -1; v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} - \dfrac{v_n}{4}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{و} \quad \forall n \in \mathbb{N}; u_n = 2^n \times v_n .$$

أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية و حدد أساسها و حدها الأول .

ب- عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.

2)- المتتاليات الهندسية:

- **تعريف:**

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q حيث $q \in \mathbb{R}^*$ إذا كان :

$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = q \times u_n$.

- **مثال:**

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$.

بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول u_0 .

- **خاصية07:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن : $\forall n\in\mathbb{N};u_n=q^n\times u_0$

و بصفة عامة : $\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2;u_n=q^{n-m}\times u_m$.

- **تمرين10:**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ بحيث :

$$\begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=1-\frac{v_n}{2};\forall n\in\mathbb{N}\end{cases} \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N};u_n=3v_n-2 .$$

أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول .

ب- عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.

- **خاصية08:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q\neq 1$ و $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$

مجموع n حدا الأولى حيث $n\in\mathbb{N}^*$ فإن : $S_n=u_0\times\frac{1-q^n}{1-q}$.

و بصفة عامة : $\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2/n<m;\ u_n+u_{n+1}+...+u_m=u_n\frac{1-q^{m-n+1}}{1-q}$.

- **تمرين11:**

أ- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية بحيث $u_4=16$ و $u_9=512$ فحدد أساسها q

ثم أحسب S_6 مجموع الحدود الستة الأولى .

ب- إذا علمت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية حدها الأول $u_1=7$ و أساسها $q=2$ فحل في

المجموعة $\mathbb{N}^*$ المعادلة : $S_n=1785$ ، ثم أحسب u_n .

ج- إذا علمت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ ، فحل في المجموعة $\mathbb{N}^*$ النظمة :

$\begin{cases} u_n=27 \\ S_n=3267\end{cases}$ ، ثم أحسب الحد الأول u_1 .

د- نعتبر المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ بحيث : $\forall n\in\mathbb{N};x_n=(-2)^n+3n+1$.

أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=x_0+x_1+...+x_n$.

- **خاصية09:**

تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N};u_n\times u_{n+2}=u_{n+1}^2$.

- **تمرين11:**

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ بحيث :

$$\begin{cases} v_0=-1;v_1=1 \\ v_{n+2}=v_{n+1}-\frac{v_n}{4};\forall n\in\mathbb{N}\end{cases} \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N};u_n=v_{n+1}-\frac{v_n}{2} .$$

أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول .

ب- عبر عن u_n ثم v_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.