

القدرات المستهدفة

- 1 - استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
- 2 - إنشاء مرجح  $n$  نقطة ( $2 \leq n \leq 4$ ).
- 3 - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
- 4 - استعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمات.
- 5 - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية.

I - النقطة المتزنة

**تعريف:** لتكن  $A$  نقطة من المستوى  $(P)$  و  $\alpha$  عدد حقيقي.

الزوج  $(A, \alpha)$  يسمى نقطة متزنة. و نقول كذلك أن النقطة  $A$  معينة بالمعامل  $\alpha$  أو العدد  $\alpha$  وزن النقطة  $A$ .

II - مرجح نقطتين متزنتيننشاط رقم 1

$A$  و  $B$  نقطتان مختلفتان.

(أوجد علاقة بين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AG}$ )

أ - أنشئ النقطة  $G$  بحيث  $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ .

هل يمكن إنشاء نقطة  $G$  بحيث  $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ؟ علل جوابك.

ب - لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من المستوى و  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين.

حدد علاقة بين  $\alpha$  و  $\beta$  لكي يتحقق وجود النقطة  $G$  بحيث  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ .

**مبرهنة و تعريف:**

لتكن  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  نقطتين متزنتين من المستوى  $(P)$  بحيث  $\alpha + \beta \neq 0$ .

توجد نقطة وحيدة  $G$  من المستوى  $(P)$  بحيث  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ .

النقطة  $G$  تسمى مرجح النقطتين المتزنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$ .

ملاحظة:

-  $G$  مرجح النقطتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  تحقق العلاقة  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$ .

- إذا كان  $\alpha + \beta = 0$  فإن  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  ليس لها مرجح.

تمارين تطبيقيةتمرين رقم 1:

حدد عددين حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تكون النقطة  $G$  هي مرجح النقطتين المتزنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$ .

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{AB} \quad -1$$

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{BA} = \vec{0} \quad -2$$

$$-3 \quad G \text{ ممتالة } A \text{ بالنسبة للنقطة } B.$$

تمرين رقم 2:

حدد موقع النقطة  $G$  مرجح النقطتين المتزنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  في الحالات التالية:

$$-1 \quad (A, 2) \text{ و } (B, 1)$$

$$-2 \quad (A, -1) \text{ و } (B, 2)$$

$$-3 \quad (A, -3) \text{ و } (B, -2)$$

تمرين رقم 3:

أنشئ  $G$  مرجح النقطتين  $(A, -2)$  و  $(B, 3)$  و  $G'$  مرجح النقطتين  $(A, 2)$  و  $(B, 1)$ .

أكتب  $\overrightarrow{GG'}$  بدلالة  $\overrightarrow{AB}$ .

نشاط رقم 2

ليكن  $k \in \mathbb{R}^*$  و  $G$  مرجح النقطتين المتزنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  بحيث  $\alpha + \beta \neq 0$ .

بين أن  $G$  هو مرجح النقطتين المتزنتين  $(A, k\alpha)$  و  $(B, k\beta)$ .

**خاصية:**

مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب وزنيهما في عدد حقيقي غير منعدم.

تمرين تطبيقي

$G$  مرجح النقطتين المتزنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  بحيث  $\alpha + \beta \neq 0$ .

أوجد العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بدلالة  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث يكون  $G$  مرجح النقطتين المتزنتين  $(A, a)$  و  $(B, b)$  و  $a + b = 1$ .

القدرات المستهدفة

- 1 - استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
- 2 - إنشاء مرجح  $n$  نقطة ( $2 \leq n \leq 4$ ).
- 3 - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
- 4 - استعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمت.
- 5 - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية.

نشاط رقم 3

لتكن  $M$  نقطة من المستوى .

بين أن مرجح النقطتين المترنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(M, \alpha + \beta)$  يعطى بالعلاقة  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$

**مبرهنة:**

لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من المستوى  $(P)$  و  $\alpha$  و  $\beta$  عددين حقيقيين بحيث  $\alpha + \beta \neq 0$ .

النقطة  $G$  هي مرجح النقطتين المترنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  إذا و فقط إذا كان لكل نقطة  $M$  من المستوى  $(P)$  :  $(\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}$

تمارين تطبيقيةتمرين رقم 1 :

$ABC$  مثلث و  $B'$  مرجح  $(A, -2)$  و  $(C, 1)$  و  $A'$  مرجح  $(A, 2)$  و  $(B, 3)$  و  $C'$  مرجح  $(C, -1)$  و  $(B, 3)$ .

1 - أنشئ الشكل.

2 - بين أن لكل نقطة  $M$  من المستوى  $-\overrightarrow{MA'} - \overrightarrow{MB'} + 2\overrightarrow{MC'} = \vec{0}$ .

3 - أستنتج أن النقط  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  مستقيمية.

تمرين رقم 2 :

1 - أنشئ  $I$  مرجح  $(A, 2)$  و  $(C, 1)$  و  $J$  مرجح  $(A, 1)$  و  $(B, 2)$  و  $K$  مرجح  $(B, -4)$  و  $(C, 1)$ .

2 - بين أن  $B$  مرجح  $(K, 3)$  و  $(C, 1)$ .

3 - بين أن  $J$  منتصف القطعة  $[KI]$ .

تمرين رقم 3 :

لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من المستوى  $(P)$ .

1 - حدد مجموعة النقط  $M$  بحيث  $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 0$ .

2 - حدد مجموعة النقط  $M$  بحيث  $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|$ .

**تعريف:**

مركز ثقل نقطتين  $A$  و  $B$  هو مرجح هاتين النقطتين معينتين بمعاملين متساويين غير منعدمين .

مركز ثقل نقطتين  $A$  و  $B$  هو منتصف القطعة  $[AB]$ .

**إحداثيات مرجح نقطتين :**

نشاط رقم 4

ليكن  $G$  مرجح النقطتين المترنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$ .

1 - أكتب  $\overrightarrow{AG}$  بدلالة  $\overrightarrow{AB}$ .

2 - علما أن  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  و  $G(x_G, y_G)$  أكتب  $x_G$  بدلالة كل من  $x_A$  و  $x_B$  و  $y_G$  بدلالة كل من  $y_A$  و  $y_B$ .

**قاعدة :**

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  لتكن النقط  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  و  $G(x_G, y_G)$ .

إذا كان  $G$  هي مرجح النقطتين المترنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  فإن :  $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$  و  $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$

تمرين تطبيقي

المستوى  $(P)$  منسوب إلى معلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

لتكن النقط  $A(1, 0)$  و  $B(0, 3)$  و  $C(3, 7)$  و  $D(-1, 2)$ .

النقطة  $G$  مرجح  $(A, 1)$  و  $(C, 2)$  و  $G'$  مرجح  $(B, 1)$  و  $(D, 2)$ .

لتكن  $M$  و  $N$  و  $P$  منتصفات القطع  $[AB]$  و  $[CD]$  و  $[GG']$  على التوالي.

1 - أحسب إحداثيات النقط  $G$  و  $G'$  و  $M$  و  $N$  و  $P$ .

2 - بين أن النقط  $M$  و  $N$  و  $P$  مستقيمية.

III - مرجح ثلاث نقط متزنةنشاط رقم 5

$A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط مختلفة .

أ - أنشئ النقطة  $G$  بحيث  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

( اكتب  $\overrightarrow{AG}$  بدلالة  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  )

هل يمكن إنشاء نقطة  $G$  بحيث  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$  ؟ علل جوابك.

القدرات المستهدفة

- 1 - استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
- 2 - إنشاء مرجح  $n$  نقطة ( $2 \leq n \leq 4$ ).
- 3 - استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى.
- 4 - استعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمات.
- 5 - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية.

ب- لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط مختلفة من المستوى و  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\delta$  أعداد حقيقية .  
حدد علاقة بين  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\delta$  لكي يتحقق وجود النقطة  $G$  بحيث  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \delta\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

**مبرهنة و تعريف :**

لتكن  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  ثلاث نقط متزنة من المستوى  $(P)$  بحيث  $\alpha + \beta + \delta \neq 0$ .

توجد نقطة وحيدة  $G$  من المستوى  $(P)$  بحيث  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \delta\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

النقطة  $G$  تسمى مرجح النقط المتزنة  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$ .

**ملاحظة :**

$G$  - مرجح النقط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  تحقق العلاقة  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{AB} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{AC}$ .

- إذا كان  $\alpha + \beta + \delta = 0$  فإن  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  ليس لها مرجح.

تمرين تطبيقي

- 1 - حدد أعداد حقيقية  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\delta$  بحيث يكون  $G$  مرجح النقط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  في الحالة التالية  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .
- 2 - أنشئ  $G$  مرجح النقط  $(A, 2)$  و  $(B, -1)$  و  $(C, -2)$ .
- 3 - النقطة  $D$  هي مرجح النقط  $(A, 1)$  و  $(B, 1)$  و  $(C, -1)$  ، حدد طبيعة الرباعي  $ACBD$ .

نشاط رقم 6

لتكن  $M$  نقطة من المستوى .

بين أن  $G$  مرجح النقط المتزنة  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$   $\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \delta)\overrightarrow{MG}$

**مبرهنة:**

لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط مختلفة من المستوى  $(P)$  و  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\delta$  أعداد حقيقية بحيث  $\alpha + \beta + \delta \neq 0$ .

النقطة  $G$  هي مرجح النقط المتزنة  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  إذا و فقط إذا كان لكل نقطة  $M$  من المستوى  $(P)$  :

$$(\alpha + \beta + \delta)\overrightarrow{MG} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC}$$

تمرين تطبيقي

- 1 - نعتبر النقط المختلفة  $A$  و  $B$  و  $C$  ،  
و  $G$  مرجح النقطين المتزنتين  $(A, 2)$  و  $(B, -3)$  و  $H$  مرجح النقط المتزنة  $(A, 2)$  و  $(B, -3)$  و  $(C, -1)$  .  
أ - أنشئ الشكل.

ب - بين أن  $H$  منتصف  $[CG]$ .

- 2 - نعتبر النقط المختلفة  $A$  و  $B$  و  $C$   
حدد و أنشئ مجموعة النقط  $M$  التي تحقق العلاقة  $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$ .

**تعريف:**

مركز ثقل ثلاث نقط  $A$  و  $B$  و  $C$  في المستوى هو مرجح هذه النقط معينة بنفس المعامل غير المنعدم .

بمعنى :  $G$  مركز ثقل النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  يعني  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

تمرين تطبيقي

$ABC$  و  $A'B'C'$  مثلثان.  $G$  و  $G'$  هما مركزا ثقلهما على التوالي.

بين أن  $ABC$  و  $A'B'C'$  لهما نفس مركز الثقل  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$

**إحداثيات مرجح نقطتين :**

نشاط رقم 7

ليكن  $G$  مرجح النقط المتزنة  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  .

1 - بين أن  $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{OB} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \delta} \overrightarrow{OC}$  .

- 2 - علما ان  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  و  $G(x_G, y_G)$  إستنتج  $x_G$  بدلالة كل من  $x_A$  و  $x_B$  و  $x_C$  و  $y_G$  بدلالة كل من  $y_A$  و  $y_B$  و  $y_C$  .

القدرات المستهدفة

- 1 - استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي.
- 2 - إنشاء مرجح  $n$  نقطة ( $2 \leq n \leq 4$ ).
- 3 - استعمال المرجح لإثبات استقامة ثلاث نقط من المستوى.
- 4 - استعمال المرجح لإثبات تقاطع المستقيمت.
- 5 - استعمال المرجح في حل مسائل هندسية و فيزيائية.

قاعدة:

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  لتكن النقط  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  و  $C(x_C, y_C)$  و  $G(x_G, y_G)$ .

إذا كان  $G$  هي مرجح النقطتين المتزنتين  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  فإن:  $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \delta x_C}{\alpha + \beta + \delta}$  و  $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \delta y_C}{\alpha + \beta + \delta}$

تمرين تطبيقي

- 1 - نعتبر النقط المختلفة  $A$  و  $B$  و  $C$ ، بحيث  $A(-1, 1)$  و  $B(0, 2)$  و  $C(2, -3)$ .
- و  $G$  مرجح النقطتين المتزنتين  $(A, 2)$  و  $(B, -3)$  و  $H$  مرجح النقط المتزنة  $(A, 2)$  و  $(B, -3)$  و  $(C, -1)$ .
- أ - حدد إحداثيات النقطة  $G$  ثم استنتج أن النقط  $A$  و  $B$  و  $G$  مستقيمية.
- ب - حدد إحداثيات النقطة  $H$  ثم بين أن  $H$  منتصف  $[CG]$ .

III - مرجح أربع نقط متزنةمبرهنة و تعريف:

- لتكن  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  و  $(D, \lambda)$  أربع نقط متزنة من المستوى  $(P)$  بحيث  $\alpha + \beta + \delta + \lambda \neq 0$ .
- توجد نقطة وحيدة  $G$  من المستوى  $(P)$  بحيث  $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \delta \overrightarrow{GC} + \lambda \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .
- النقطة  $G$  تسمى مرجح النقط المتزنة  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  و  $(D, \lambda)$ .

ملاحظة:

- $G$  - مرجح النقط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  و  $(D, \lambda)$  تحقق العلاقة  $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \delta + \lambda} \overrightarrow{AB} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \delta + \lambda} \overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{\alpha + \beta + \delta + \lambda} \overrightarrow{AD}$
- إذا كان  $\alpha + \beta + \delta + \lambda = 0$  فإن  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  و  $(D, \lambda)$  ليس لها مرجح.

نشاط رقم 8

- ليكن  $G$  مرجح النقط  $(A, 1)$  و  $(B, -3)$  و  $(C, +1)$  و  $(D, 2)$ .
- نعتبر  $M$  مرجح النقطتين  $(A, 1)$  و  $(B, -3)$ .
- و  $N$  مرجح النقطتين  $(C, 1)$  و  $(D, 2)$ .

- 1- أرسم  $M$  و  $N$ .
- 2- بين أن  $G$  مرجح النقطتين  $(M, -2)$  و  $(N, 3)$ .
- 3 - استنتج طريقة لإنشاء مرجح أربع نقط متزنة.

خاصية التجميعية

مرجح أربع نقط متزنة هو مرجح مرجحي كل نقطتين منهما معينين بمجموع معاملاتهما.

مبرهنة:

- لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  أربع نقط مختلفة من المستوى  $(P)$  و  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\delta$  و  $\lambda$  أعداد حقيقية بحيث  $\alpha + \beta + \delta + \lambda \neq 0$ .
- النقطة  $G$  هي مرجح النقط المتزنة  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \delta)$  و  $(D, \lambda)$  إذا و فقط إذا كان لكل نقطة  $M$  من المستوى  $(P)$ :

$$(\alpha + \beta + \delta + \lambda) \overrightarrow{MG} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \delta \overrightarrow{MC} + \lambda \overrightarrow{MD}$$

تمرين تطبيقي

- 1 -  $ABCD$  متوازي الأضلاع. بين أن مرجح النقط المتزنة  $(A, 1)$  و  $(B, 1)$  و  $(C, 2)$  و  $(D, 1)$  ينتمي إلى  $(AC)$ .
- 2 -  $ABCD$  متوازي الأضلاع. بين أن مركزه  $O$  هو مركز ثقل النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$ .