

القدرات المستهدفة

- التعبير عن توازي و تعامد مستقيمين .
- حساب مساحات و قياسات زوايا باستعمال الجداء السلمي.

I - الجداء السلمي "تذكير"نشاط رقم 1

ليكن ABC و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

بحيث $AB = 2$ و $AC = 5$ و $BC = 4$ و $BH = 1$ و $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$.

- 1 - أحسب الجداء السلمي $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$
- 2 - أحسب الجداء السلمي $\vec{BA} \cdot \vec{BH}$
- 3 - حدد قياسا للزاوية \widehat{ABH}
- 4 - أحسب الجداء السلمي $\vec{AH} \cdot \vec{BC}$

1 - الصيغة المثلثية للجداء السلميتعريف:

- A و B و C ثلاث نقط من المستوى بحيث $A \neq B$ و $A \neq C$

الجداء السلمي للمتجهين \vec{AB} و \vec{AC} هو العدد $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

- \vec{u} و \vec{v} متجهين غير منعدمتين .

الجداء السلمي للمتجهين \vec{u} و \vec{v} هو العدد $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

ملاحظة:

- إذا كانت $\alpha = 0$ فإن $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

- إذا كانت $\alpha = \pi$ فإن $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AC$ و $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AC$

2 - صيغة الإسقاط للجداء السلمي.

\vec{AB} و \vec{AC} متجهين غير منعدمتين في المستوى و C' المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) .

الجداء السلمي للمتجهين \vec{AB} و \vec{AC} هو العدد الحقيقي $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ المعروف بـ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}'$

خاصية:

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهين غير منعدمتين .

تكون المتجهتان \vec{u} و \vec{v} متعامدتين و نكتب $\vec{u} \perp \vec{v}$ إذا و فقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3 - خاصيات الجداء السلمي.

لتكن \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} متجهات و $k \in \mathbb{R}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

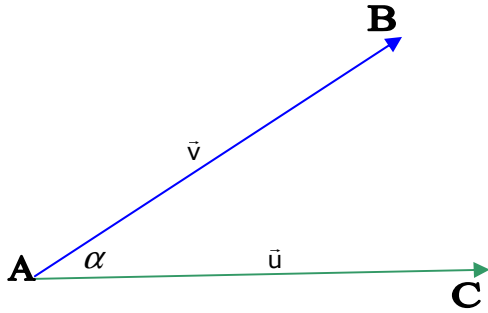
تمرين تطبيقي رقم 1

1 - \vec{u} و \vec{v} متجهتان و α قياس الزاوية (\vec{u}, \vec{v}) .

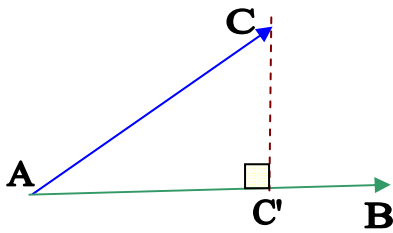
أ - أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ علما أن $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$ و $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ و $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

ب - أحسب $\|\vec{u}\|$ علما أن $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}$ و $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

ج - أحسب $\cos \alpha$ علما أن $\|\vec{u}\| = 3$ و $\|\vec{v}\| = 2$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.



$$\alpha = \widehat{BAC} = (\vec{u}, \vec{v})$$



القدرات المستهدفة

- التعبير عن توازي و تعامد مستقيمين .
- حساب مساحات و قياسات زوايا باستعمال الجداء السلمي.

2- \vec{u} و \vec{v} متجهتان بحيث $\vec{u}^2 = 2$ و $\vec{v}^2 = 3$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$.
أ- أحسب $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

ب- بين أن $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

II - الصيغ التحليلية**1 - الجداء السلمي**نشاط رقم 2

نعتبر متجهتين \vec{u} و \vec{v} في المستوى (P) المنسوب لمعلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j})

بحيث $\vec{u}(x, y)$ و $\vec{v}(x', y')$

أكتب الجداء السلمي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ بدلالة x و x' و y و y'

خاصية:

المستوى (P) منسوب لمعلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j})

إذا كانت \vec{u} و \vec{v} متجهتين بحيث $\vec{u}(x, y)$ و $\vec{v}(x', y')$ في الأساس (\vec{i}, \vec{j})

فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

2 - إحداثيتا متجهة في أساس متعامد منظم مباشر.نشاط رقم 3

نعتبر متجهة $\vec{u}(x, y)$ في أساس متعامد منظم (\vec{i}, \vec{j})

1- أحسب $\vec{u} \cdot \vec{i}$ و $\vec{u} \cdot \vec{j}$

2- استنتج قيمة x و y بدلالة α قياس الزاوية (\vec{i}, \vec{u})

3- أكتب \vec{u} بدلالة $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$

خاصية:

إذا كان (x, y) هو زوج إحداثيتي متجهة غير منعدمة \vec{u} في أساس متعامد منظم مباشر (\vec{i}, \vec{j})

و α قياس الزاوية (\vec{i}, \vec{u}) فإن $\vec{u} = \|\vec{u}\|(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$

3 - منظم متجهة و المسافة بين نقطتيننشاط رقم 4

نعتبر النقطتين $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ في معلم متعامد منظم .

1- حدد إحداثيتي المتجهة \overline{AB}

2- أحسب $\|\overline{AB}\|^2$ ثم استنتج تعبيراً للمسافة AB

خاصية:

إذا كانت $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ نقطتين في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j})

و إذا كانت $\vec{u}(x, y)$ في الأساس (\vec{i}, \vec{j}) فإن :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

4 - حساب $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ نشاط رقم 5

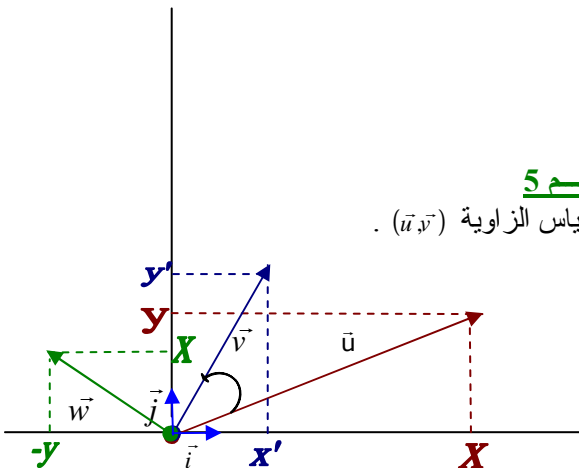
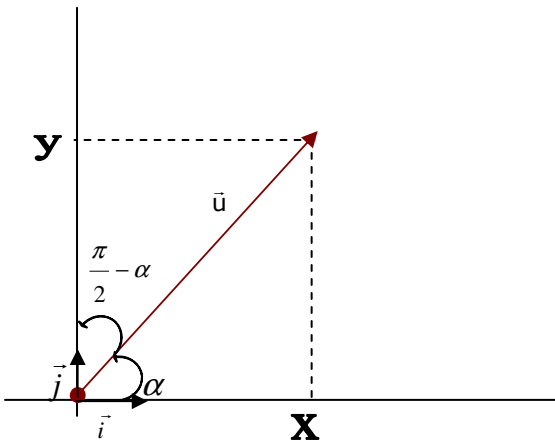
نعتبر المتجهتين $\vec{u}(x, y)$ و $\vec{v}(x', y')$ في أساس متعامد منظم مباشر (\vec{i}, \vec{j}) و α قياس الزاوية (\vec{u}, \vec{v})

1- أحسب الجداء السلمي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ثم استنتج $\cos \alpha$ بدلالة $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$

2- نعتبر المتجهة \vec{w} بحيث $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{2}$ و $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

أ- أحسب $\vec{v} \cdot \vec{w}$ بدلالة $\sin \alpha$

ب- أوجد تعبيراً لـ $\sin \alpha$ بدلالة $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ و $\det(\vec{u}, \vec{v})$



القدرات المستهدفة

- التعبير عن توازي و تعامد مستقيمين .
- حساب مساحات و قياسات زوايا باستعمال الجداء السلمي.

خاصية:

إذا كان \vec{u} و \vec{v} متجهتان غير منعدمتين و α قياس الزاوية (\vec{u}, \vec{v}) فإن :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \text{ و } \sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

تمرين تطبيقي رقم 2

(\vec{i}, \vec{j}) اساس متعامد ممنظم مباشر.

1 - أحسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ في الحالتين التاليتين :

أ - $\vec{v}(-2,4)$ و $\vec{u}(3,-1)$.

ب - $\vec{v}(\sqrt{2}-1, \sqrt{3}+2)$ و $\vec{u}(\sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{2}+1)$.

2 - حدد قيمة العدد m لكي تكون $\vec{v}(3,-2)$ و $\vec{u}(2,m)$ متعامدتين .

3 - نعتبر المتجهة $\vec{u}(2,-3)$. حدد المتجهات $\vec{v}(x,y)$ بحيث يكون $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ و $\|\vec{v}\| = 2$.

4 - نعتبر المتجهتين $\vec{u}(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$ و $\vec{v}(-1,1)$. أحسب $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ و $\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

III - معادلة مستقيم معرف بمتجهة منظمية:1 - متجهة منظمية على مستقيم.نشاط رقم 6

نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته : $2x - 3y + 1 = 0$.

1 - حدد متجهة \vec{u} موجهة للمستقيم (D) .

2 - بين أن المتجهات $\vec{n}(2,-3)$ و $\vec{n}'(6,-9)$ و $\vec{n}''(-10,15)$ متعامدة مع المتجهة \vec{u} .

3 - بين أن المتجهات $\vec{n}(2,-3)$ و $\vec{n}'(6,-9)$ و $\vec{n}''(-10,15)$ مستقيمتان مثلى مثلى.

تعريف:

(D) مستقيم في المستوى .

كل متجهة غير منعدمة عمودية على متجهة موجهة للمستقيم (D) تسمى متجهة منظمية على (D) .

\vec{u} متجهة موجهة للمستقيم (D)
و \vec{n} متجهة منظمية عليه .

ملاحظة:

- إذا كانت \vec{n} متجهة منظمية على (D) فإن كل متجهة $k\vec{n}$ بحيث $k \in \mathbb{R}$ منظمية عليه .

- إذا كانت \vec{n} متجهة منظمية على (D) و \vec{n}' متجهة منظمية على (D) فإن \vec{n} و \vec{n}' مستقيمتان .

- إذا كان $\vec{u}(a,b)$ متجهة موجهة لمستقيم (D) فإن المتجهة $\vec{n}(-b,a)$ منظمية عليه .

- إذا كان (D) مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$ فإن $\vec{u}(-b,a)$ متجهة موجهة له و $\vec{n}(a,b)$ منظمية عليه .

تمرين تطبيقي رقم 3

1 - (D) مستقيم معرف بتمثيله البارامتري $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \end{cases} t \in \mathbb{R}$. حدد متجهة \vec{u} موجهة للمستقيم (D) و حدد متجهة \vec{n} منظمية على (D) .

2 - (D) مستقيم معرف بمعادلته $3x - 4y + 3 = 0$. حدد متجهة \vec{u} موجهة للمستقيم (D) و حدد متجهة \vec{n} منظمية على (D) .

3 - (D) مستقيم معادلته هي $-x + 2y - 1 = 0$.

أ - حدد معادلة المستقيم (D') الذي يمر من $A(2,1)$ و الموازي للمستقيم (D) .

ب - حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من $B(1,0)$ و العمودي على المستقيم (D) .

2 - معادلة مستقيم معرف بنقطة و بمتجهة منظمية عليه.نشاط رقم 7

ليكن (O, \vec{i}, \vec{j}) معلم متعامد ممنظم. نعتبر المتجهة $\vec{n}(3,-1)$ و النقطة $A(-2,4)$.

1 - لتكن $M(x,y)$, حدد إحداثيتي المتجهة \overline{AM} ثم أحسب الجداء السلمي $\overline{AM} \cdot \vec{n}$.

2 - بين أن مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق العلاقة $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$ هو المستقيم المار من $A(-2,4)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(1,3)$.

القدرات المستهدفة

- التعبير عن توازي و تعامد مستقيمين .
- حساب مساحات و قياسات زوايا باستعمال الجداء السلمي.

خاصية:

لتكن $\vec{n}(a,b)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_0,y_0)$ نقطة من المستوى.

مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق العلاقة $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ هي المستقيم المار من النقطة A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}(-b,a)$ بمعنى آخر: هو المستقيم المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}(a,b)$ منظمية عليه .

تمرين تطبيقي رقم 4

- 1 - حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(2,3)$ و $\vec{n}(2,-1)$ متجهة منظمية عليه .
- 2 - حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(4,-2)$ و $\vec{n}(\sqrt{2},-1)$ متجهة منظمية عليه .
- 3 - حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AB]$ بحيث $A(3,-1)$ و $B(-1,5)$.

3 - المسافة بين نقطة و مستقيم.نشاط رقم 8

- 1 - ليكن (D) مستقيم يمر من النقطة $A(-1,-1)$ و $\vec{n}(2,-1)$ متجهة منظمية عليه .
 - أ - حدد معادلة المستقيم (D) .
 - ب - حدد معادلة المستقيم (D') المار من $M(3,2)$ و العمودي على المستقيم (D) .
 - ج - حدد إحداثيتي النقطة H تقاطع (D) و (D') ثم استنتج المسافة بين النقطة M و المستقيم (D) .
- 2 - ليكن (D) مستقيم يمر من النقطة $A(x_A,y_A)$ و $\vec{n}(a,b)$ متجهة منظمية عليه .
 - أ - بين أن $\vec{n} \cdot \vec{AM} = \vec{n} \cdot \vec{HM}$.
 - ب - بين أن $MH = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

مبرهنة:

المستوى (P) منسوب لمعلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

ليكن (D) مستقيم معادلته $ax + by + c = 0$ بحيث $(a,b) \neq (0,0)$ و $M(x_M, y_M)$ نقطة من المستوى (P) .

مسافة النقطة M عن المستقيم (D) هي: $d(M, (D)) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

تمرين تطبيقي رقم 5

1 - أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D) في الحالات التالية :

- أ - $(D): 2x - 4y + 1 = 0$ و $A(3,-1)$.
- ب - $(D): x - 3y + 3 = 0$ و $A(-2,1)$.

ج - (D) و $A(3,-2)$ معرف بتمثيله البارامتري $\alpha \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = -1 - 3\alpha \end{cases}$