المادة : الرياضيات
الأستاذ : علي الشريف

درس : عموميات حول الدوال
www.madariss.fr

المستوى : الأ ولى علوم تجريبية
ثا.المختار السوسي.نيابة الخميسات

I) أنشطة تذكيرية :

☺ **نشاط رقم 1 :** (مجموعة تعريف دالة)

☺ **نشاط رقم 2 :** (زوجية دالة)

✷ تذكير :

❶ مجموعة تعريف دالة f هي مجموعة الأ عداد الحقيقية التي من أ جلها f(x) موجودة .

و نكتب : $D_f = \{x \in IR \;/\; f(x) \in IR\}$

❷ الدالة f زوجية إ ذوفقط إ ذا كان : $\begin{cases} \forall x \in D_f \;:\; -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f \end{cases}$

❸ الدالة f فردية إ ذوفقط إ ذا كان : $\begin{cases} \forall x \in D_f \;:\; -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f \end{cases}$

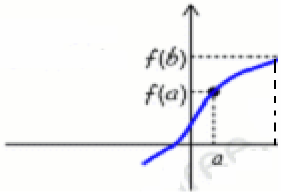
☺ **نشاط رقم 3 :** (الشلجم و الهدلول)

✷ تذكير :

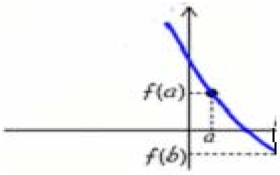
❶ تغيرات دالة :

① نقول أنf تزايدية (قطعا) على مجال I إ ذا كان لكل a من I و لكلb من I : $a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b) \quad \left(f(a) \langle f(b)\right)$

② نقول أنf تزايدية (قطعا) على مجال I إ ذا كان لكل a من I و لكلb من I : $a \le b \Rightarrow f(a) \ge f(b) \left(f(a) \rangle f(b)\right)$



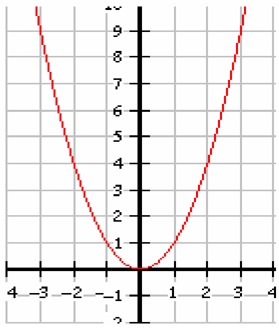
الدالة f تزايدية

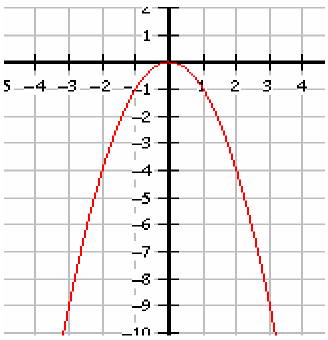


الدالة f تناقصية

❶ الشلجم :

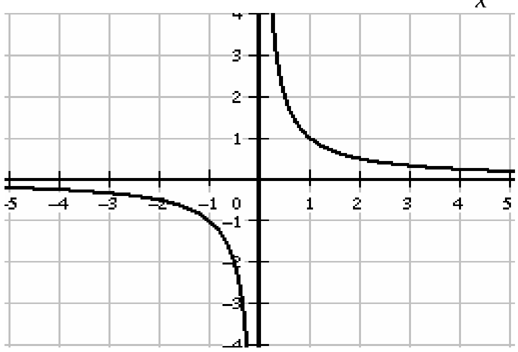
منحنى الدالة $f(x) = ax^2$.

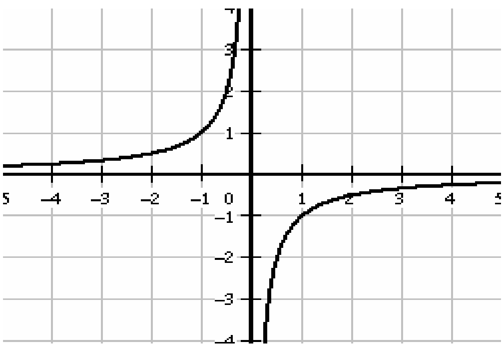

$a \rangle 0$


$a \langle 0$

❷ الهذلول:

منحنى الدالة $f(x) = \frac{a}{x}$:


$a \rangle 0$


$a \langle 0$

☺ **نشاط رقم 4 :** (التغيرات و زوجية دالة)
☺ **نشاط رقم 5 :** (مطارف دالة)
✷تذكير :
لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و D_f مجموعة تعريفها
❶ f تقبل قيمة قصوى عند النقطة α إ ذا وجد ضمن D_f مجال مفتوح I بحيث : $\alpha \in I$ و $f(x) \le f(\alpha)$ لكل x من I .
❷ f تقبل قيمة دنيا عند النقطة β إ ذا وجد ضمن D_f مجال مفتوح J بحيث : $\beta \in J$ و $f(\beta) \le f(x)$ لكل x من J .
❸ f تقبل قيمة قصوى مطلقة (قيمة دنيا مطلقة) عند النقطة α إ ذا كان لكل x من D_f $f(x) \le f(\alpha)$ ($f(x) \ge f(\alpha)$)

I) الدالة المكبورة – الدالة المصغورة – الدالة المحدودة:

☺ **نشاط رقم 1 :** (الدالة المكبورة – الدالة المصغورة)
تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال I من IR. نقول أ ن :
- f مكبورة على I إ ذا وجد عدد حقيقي M بحيث لكل x من I : $f(x) \le M$
- f مصغورة على I إ ذا وجد عدد حقيقي m بحيث لكل x من I : $f(x) \ge m$.
- f محدودة على I إ ذا كانت مصغورة و مكبورة على I .

☹**التمرين رقم 1 :**
خاصية :

لتكن f دالة معرفة على مجال I من IR.
تكون الدالة f محدودة على I إ ذا وفقط إ ذا وجد عدد حقيقي موجب k بحيث : $|f(x)| \le k$ لكل x من I .

II) الدالة الدورية :

☺ **نشاط رقم 2 :** (الدالة الدورية)
تعريف :

لتكن f دالة عددية و D مجموعة تعريفها .
نقول إ ن f دالة دورية إ ذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث :
لكل x من D : $(x+T) \in D$ و $f(x+T) = f(x)$ العدد T يسمى دورا للدالة f .

✹ **التأويل الهندسي :**
لإنشاء منحنى دالة دورية يكفي إنشاء منحناها على أي مجال طوله T (حيث T يسمى دورا للدالة f) ثم آستنتاج المنحنى بآستعمال إزاجات متتالية .

مثال :
الدالتان $\sin(x)$ و $\cos(x)$ دوريتان و 2π دور لهما .

☹ تمرين تطبيقي :
لتكن الدوال f و g و h المعرفة على بما يلي :
$$h(x) = 2\cos(3x) \quad , \quad g(x) = \sin(2\pi x) \quad , \quad f(x) = \cos^2(x)$$
بين أ ن f و g و h دوال دورية أ دوارها على التوالي : $\frac{2\pi}{3} ; 1 ; \pi$.

IV) العمليات على الدوال العددية :

1) مقارنة دالتين – التأ ويل الهندسي :

☺ **نشاط رقم 3 :** (مقارنة دالتين)

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي مجموعة تعريفهما .

* نقول إ ن f تساوي g و نكتب $f = g$ إ ذا وفقط إ ذا كان : * $D_f = D_g$ و * $\forall x \in D_f : f(x) = g(x)$

* نقول أ ن f أ كبر من أ و تساوي g على مجال I إ ذا كان لكل x من I : $f(x) \geq g(x)$ و نكتب : $f \geq g$

التأويل الهندسي :

$f \leq g$ على مجال I يعني هندسيا أ ن منحنى الدالة f على I يوجد تحت منحنى الدالة g على I .

2) مجموع و جداء و خارج دالتين :

☺ **نشاط رقم 4 :** (العمليات على الدوال)

تعريف :

f و g دالتين معرفتين على نفس المجموعة D .

* مجموع الدالتين f و g هو الدالة المعرفة على D ب $f+g$ و تكتب على شكل $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

* جداء الدالتين f و g هي الدالة المعرفة على D ب $f \times g$ و تكتب على شكل $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

* جداء الدالة f في العدد الحقيقي λ هي الدالة المعرفة على D ب λf و تكتب على شكل $(\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$

* مجموع الدالة f و العدد الحقيقي λ هي الدالة المعرفة على D ب $f+\lambda$ و تكتب على شكل $(f+\lambda)(x) = f(x) + \lambda$

* خارج الدالتين f و g هي الدالة المعرفة على D ب $\frac{f}{g}$ و تكتب على شكل $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

" شريطة أ ن لا تنعدم الدالة g في D "

مبرهنة 1 :

* مجموع دالتين تزايديتين (قطعا) هو دالة تزايدية (قطعا) .
* مجموع دالتين تناقصيتين (قطعا) هو دالة تناقصية (قطعا) .

☺ تمرين تطبيقي :

هل يمكن آستنتاج رتابة الدوال التالية :

1) مجموع دالة تزايدية و دالة تزايدية قطعا , 2) مجموع دالة تزايدية و دالة تناقصية و 3) جداء دالتين تزايديتين .
4) جداء دالتين تناقصيتين , 5) جداء دالة تزايدية و دالة تناقصية .

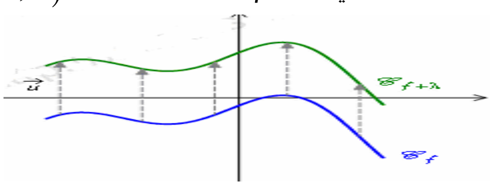
مبرهنة 1 :

ليكن λ عدد حقيقي و f دالة عددية .

* الدالتين f و $f+\lambda$ لهما نفس منحى التغيرات .
* إ ذا كان $\lambda \rangle 0$, الدالتين f و λf لهما نفس منحى التغيرات .
* إ ذا كان $\lambda \langle 0$, الدالتين f و λf منحى تغيراتهما متعاكسان .

☯ ملحوظة :

* التمثيل المبياني للدالة $f+\lambda$ يستنتج من التمثيل المبياني للدالة f بإزاحة متجهتها $\vec{u}(0;\lambda)$.



2) صورة مجال بدالة عددية :

☺ نشاط رقم 5 :(صورة مجال بدالة)

تعريف :

لتكن f دالة عددية , و D_f مجموعة تعريفها .

ليكن I مجالا من IR ضمن D_f .

المجموعة المكونة من العناصر $f(x)$ عندما يتغير x على المجال I , تسمى صورة المجال I بالدالة f , و يرمز لها بالرمز $f(I)$

أي : * $f(I)=\{f(x)/x\in I\}$, * $y\in f(I)\Leftrightarrow(\exists x\in I):y=f(x)$

ملحوظة :

* f دالة عددية , و D_f مجموعة تعريفها . I و J مجالان من IR بحيث : $I\subset D_f$

لدينا : $f(I)\subset J\Leftrightarrow(\forall x\in I);f(x)\in J$

3) مركب دالتين :

☺ **نشاط رقم 6 :** (مركب دالتين)

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على D_f و D_g.

نضع : $D=\{x\in IR/x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$

الدالة العددية h المعرفة على D بما يلي : $h(x)=g(f(x))$, تسمى مركب الدالتين f و g في هذا الترتيب

و يرمز لها بالرمز : gof .

ملحوظة :

* $D_{gof}=\{x\in IR/\ x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$.

أ مثلة :

❶ لتكن f الدلة المعرفة على IR بما يلي $f(x)=x^2$ و الدالة g المعرفة على IR بما يلي : $g(x)=2x+1$

لدينا : $f(g(x))=fog=f(2x+1)=(2x+1)^2$.

❷ لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;5]$ بما يلي : $f(x)=-x+5$ و الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ ب : $g(x)=\sqrt{x}$

لدينا : $g(f(x))=gof(x)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{-x+5}$.

ملحوظة :

لتكن u و v دالتين معرفتين على التوالي على IR . بصفة عامة لدينا $uov\neq vou$ (نقول أن مركب دالتين عملية غير تيادلية)

4) رتابة مركب دالتين :

☺ **نشاط رقم 7** (رتابة مركب دالتين)

خاصية :

لتكن f دالة معرفة على المجال I وg دالة معرفة على المجال J بحيث لكل x من I لدينا f(x) تنتمي إلى J .

- إذا كانت f وg تزايديتين على I و J على التوالي فإن gof تزايدية على I .
- إذا كانت f وg تناقصيتين على I و J على التوالي فإن gof تزايدية على I .
- إذا كانت f تزايدية على I وg تناقصية على J فإن gof تناقصية على I .
- إذا كانت f تناقصية على I وg تزايدية على J فإن gof تناقصية على I .

☹التمرين رقم11:

3) منحى تغيرات الدالتين $f+\lambda$ و $\lambda.f$:

☺ **نشاط رقم 8 :**

V) التمثيل المبياني للدالتين $x \to \sqrt{x+a}$ و $x \to a.x^3$:

1) دراسة الدالة $f(x)=\sqrt{x+a}$ حيث a عدد حقيقي :

☺ نشاط رقم9:

☯ خلاصة :

* محموعة تعريف الدالة $f(x)=\sqrt{x+a}$ هي $D_f=[-a;+\infty[$.

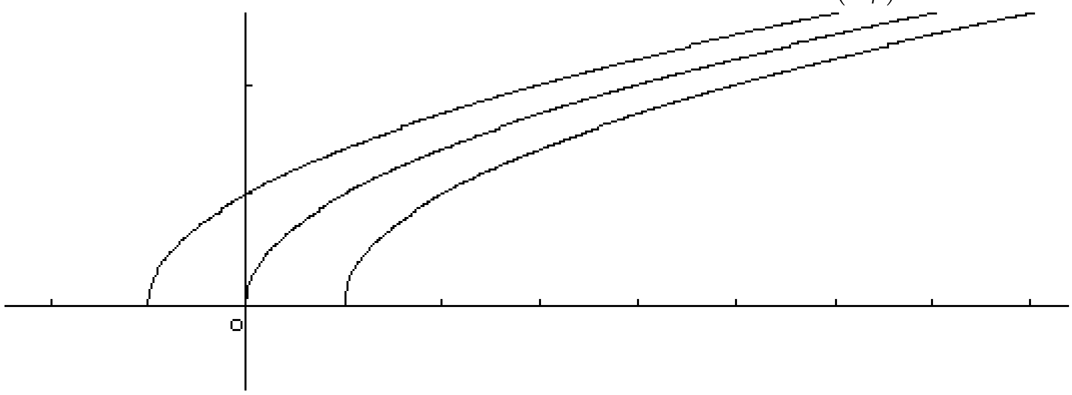
* رتابة الدالة f : تزايدية قطعا على المجال $[-a;+\infty[$.

* جدول تغيرات الدالة f :

x	$-a$ $\qquad$ $+\infty$
f	$0 \nearrow +\infty$

* التمثيل المبياني للدالة f :

في الشكل جانبه أنشئنا المنحنى (C_f) من أ جل $a=0$ و $a=-1$ و $a=1$.



☯ ملحوظة :

منحنى الدالة $x \to \sqrt{x+a}$ يستنتج من منحنى الدالة $x \to \sqrt{x}$ بالإزاحة ذات المتجهة $-a.\vec{i}$.

2) دراسة الدالة $x \to a.x^3$ حيث a عدد حقيقي غير منعدم :

☺ نشاط رقم10:

I) لتكن الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي : $g(x)=2x^3$ و ليكن (C_g) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ درس تغيرات الدالة g على المجال $[0,+\infty[$.

2) بين أ ن الدالة gفردية ثم ضع جدول تغيراتها .

cherifalix@hotmail.com

3) آنقل الجدول الآتي في دفترك ثم آملأه .

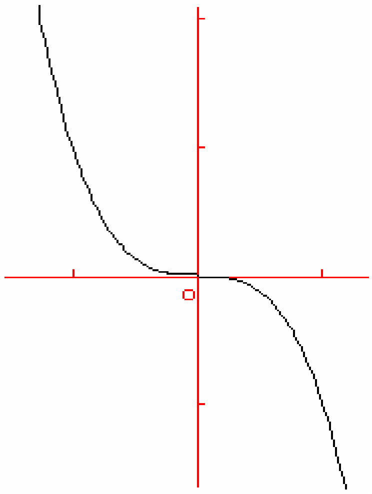
x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$g(x)$				

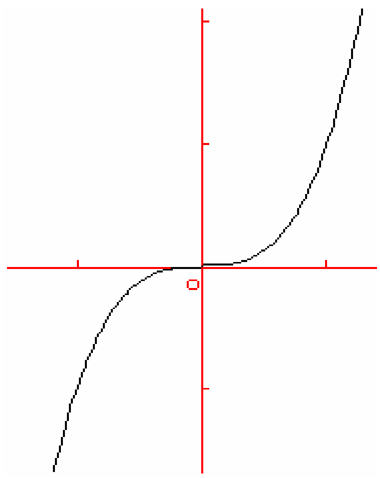
4) مستعينا بالجدول , أنشئ المنحنى (C_g) .

II) مثل مبيانيا الدالة $x \to -2x^3$.

☯ خلاصة :

- إذا كان $a\rangle 0$ فإن الدالة $g(x)=ax^3$ تزايدية قطعا على IR .
- إذا كان $a\langle 0$ فإن الدالة $g(x)=ax^3$ تناقصية قطعا على IR .





☹ تمرين تطبيقي رقم12:

أنشئ في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ منحنى الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2x^3$ ، 2) $f(x)=-\dfrac{x^3}{8}$ ، 3) $f(x)=\sqrt{x+1}$ ، 4) $f(x)=\sqrt{x-3}$

cherifalix@hotmail.com

المراجع :
1) كتاب الجيد في الرياضيات . السنة الأولى علوم تجريبية
2) كتاب في رحاب الرياضيات . . السنة الأولى علوم تجريبية .
3) مواقع إلكترونية .