سلسلة حول الحساب المثلثي (صيغ التحويل ...)

تمرين 1 :

بين أنه مهما يكن x من $\mathbb{R}$:

أ) $\cos^2(x)+\sin^2(x)=2-(\cos(x)-\sin(x))^2$.

ب) $(1+\cos x+\sin x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$.

تمرين 2 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}$.

1- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}:\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos(x-\frac{\pi}{6})$.

2- حدد حيز تعريف الدالة f .

3- أحسب : $f(x+\pi)$.

تمرين 3 :

1- أ- تحقق أن : $\forall x\in\mathbb{R}:2\sin(x+\frac{\pi}{3})=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

ب- حدد عددا a بحيث يكون لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}:\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-a)$.

2- نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):\tan x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$. بين أن المعادلة (E) تكافئ

المعادلة : $\sin(x-\frac{\pi}{4})=\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

3- أ- حل في المجال $[0,2\pi]$ المعادلة (E) .

ب- حل في المجال $[0,2\pi]$ المتراجحة : $\tan x<\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

تمرين 4 :

نعتبر التعبير A(x) ذو المتغير الحقيقي x بحيث :

$\forall x \in \mathbb{R} : A(x) = 2\cos^3 x - 2\sin^2 x \cos x - \cos x + \sin x$

1- احسب : $A(x+\pi)$.

2- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : A(x) = (\cos 2x + \sin 2x)(\cos x - \sin x)$.

3- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $A(x) = 0$.

4- مثل حلول المعادلة السابقة على الدائرة المثلثية .

5- حل في المجال $\left[0,\pi\right]$ المتراجحة : $\cos(2x - \frac{\pi}{4})\cos(x + \frac{\pi}{4}) > 0$.

6- استنتج إشارة $A(x)$ على المجال $\left[0,2\pi\right]$.

تمرين 5 :

لكل عدد حقيقي x نضع : $g(x) = \sqrt{3}(4\cos^4 x + \sin^2 2x) - 2\sin 2x$.

1- أحسب : $g(\frac{\pi}{3})$ و $g(\pi)$.

2- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : 4\cos^4 x = 4\cos^2 x - \sin^2 x$.

3- أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = 4\cos x(\sqrt{2}\cos x - \sin x)$

ب- حل في المجال $[-\pi,\pi]$ المعادلة : $g(x) = 0$.

4- أ- تحقق أن : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] : g(x) = 4\cos^2 x(\sqrt{3} - \tan x)$.

ب- حل في المجال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ المتراجحة : $g(x) > 0$.

تمرين 6 :

1- حل في المجال $]-\pi,\pi]$ المعادلتين : $2\cos x - 1 = 0$ و $2\sin x + \sqrt{3} = 0$.

2- أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : \cos 4x = -2\sin(2x - \frac{\pi}{4})\cos(2x - \frac{\pi}{4})$.

ب- $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{3}\cos(2x - \frac{\pi}{4}) - \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{12})$.

3- لكل x من $\mathbb{R}$ نضع : $A(x) = -2\cos 4x + 4\cos(2x - \frac{\pi}{12}) - \sqrt{3}$.

أ) تحقق من أن : $\forall x \in \mathbb{R} : A(x) = \left[2\cos(2x - \frac{\pi}{4}) - 1\right]\left[2\sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{3}\right]$.

ب) حل في المجال $\left]-\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ المتراجحة : $A(x) < 0$.

تمرين 7 :

1) حول المجموع $S(x)$ إلى جداء (حيث $x \in \mathbb{R}$) في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $S(x) = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$.

ب) $S(x) = 1 + \cos 2x + 2\cos x$.

ج) $S(x) = \sin x + 2\sin 2x + \sin 3x$.

د) $S(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$.

2) حول الجداء $P(x)$ إلى مجموع (حيث $x \in \mathbb{R}$) في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $P(x) = \cos x \sin 2x \sin 3x$.

ب) $P(x) = \sin x \cos 2x \cos 3x$.

ج) $P(x) = \sin 2x \sin 3x \cos 5x$.

د) $P(x) = 4\sin\frac{3}{4}x \cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$.

تمرين 8 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $1 - \cos 2x + \sin 3x - \sin x = 0$.