Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

I ـ قابلية اشتقاق دالة في عدد :

تعريف :

**نقول إن الدالة f قابلة للإشتقاق في النقطة x_0 إذا وجد عدد حقيقي A بحيث :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$$

** العدد A يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 و نكتب $f'(x_0)=A$.

مثال :

لندرس قابلية اشتقاق f في النقطة 1 بحيث $f(x)=2x^2-x$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to -2}\frac{2x^2-x-1}{x-1} \qquad (\text{لأن } f(1)=1\ )$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}2x+1=3 \qquad (\text{بعد حساب المميز و التعميل})$$

إذن الدالة f قابلية للاشتقاق في النقطة 1 و لدينا $f'(1)=3$.

II ـ الدالة التآليفية المماسة لدالة في عدد :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 .

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن الدالة التآليفية المماسة للدالة f في x_0 هي الدالة $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

1 ـ لنحدد العدد المشتق للدالة f عند 1 .

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2-\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x}-1}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}-\frac{\sqrt{x}-1}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}-\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=-\frac{1}{8}$$

2 ـ لنحدد الدالة التآليفية المماسة ل f في 1 .

$$g(x)=f'(1)(x-1)+f(1)$$

ومنه

$$g(x)=\frac{-1}{8}(x-1)+\frac{1}{2}$$

3 ـ حدد قيمة مقربة للعدد $\dfrac{1}{\sqrt{1.0001}+1}$.

بما أن $g(x)=\dfrac{-1}{8}(x-1)+\dfrac{1}{2}$ فإن الدالة g تقريب للدالة f بجوار العدد 1 ومنه $f(x)\simeq\dfrac{-1}{8}(x-1)+\dfrac{1}{2}$.

نضع $h=x-1$ إذن $x=h+1$ و بالتالي $f(h+1)\simeq\dfrac{-1}{8}h+\dfrac{1}{2}$.

لدينا : $\dfrac{1}{\sqrt{1.0001}+1}=f(1.0001)=f(0.0001+1)\approx\dfrac{-1}{8}(0.0001)+\dfrac{1}{2}=0.499988$ لاحظ أن $h=0.0001$.

III- الإشتقاق على اليمين و على اليسار :

1 – الإشتقاق على اليمين :

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح من نوع $[x_0, x_0 + a[$ بحيث $a > 0$.

نقول إن f قابلة للإشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليمين في x_0 و نرمز لها بـ $f'_d(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في x_0. ونكتب : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$

2 – الإشتقاق على اليسار :

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح من نوع $]x_0 - a, x_0]$ بحيث $a > 0$.

نقول إن f قابلة للإشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليسار في x_0 و نرمز لها بـ $f'_g(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في x_0. ونكتب : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$.

3 – خاصية :

تكون f قابلة للإشتقاق في x_0 إذا و فقط إذا كانت f قابلة للإشتقاق على اليمين و على اليسار في x_0 و العدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

بمعنى :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

مثال :

لندرس قابلية اشتقاق الدالة $f(x) = \frac{2|x|}{x - 1}$ في 0 .

** ندرس قابلية الإشتقاق على يمين 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2x}{x-1} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2x}{x-1}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{(x-1)} = -2$$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على يمين 0.

** ندرس قابلية الإشتقاق على يسار 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-2x}{x-1} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-2x}{x-1}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x}{x(x-1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2}{(x-1)} = 2$$

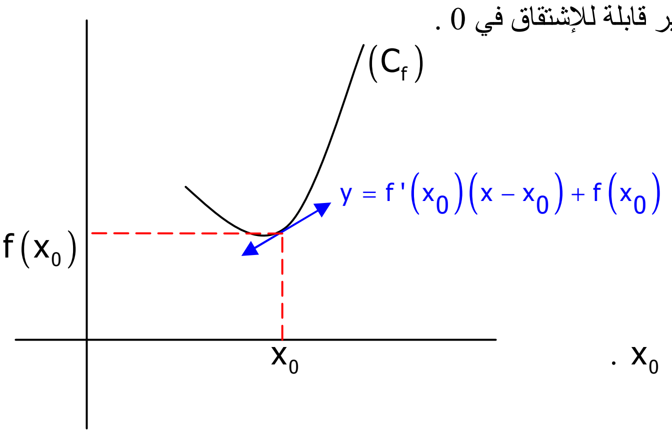
نقول إن f قابلة للاشتقاق على يسار 0.

** بما أن العدد المشتق على اليمين يخالف العدد المشتق على اليسار فإن f غير قابلة للإشتقاق في 0 .

IV- التأويل الهندسي للإشتقاق :

1 – المماس :

تعريف :



لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 .

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق في x_0 فإن (C_f) يقبل مماسا

في النقطة التي أفصولها x_0 معادلته : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

العدد $f'(x_0)$ هو المعامل الموجه للمماس لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها x_0 .

مثال :

1 – العدد المشتق للدالة $f(x) = 2x^2 - x$ في العدد 1 هو 3 .

معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$y = 3(x - 1) + 1$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

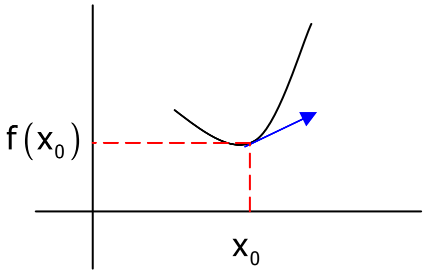
$y = 3x - 2$

2 ـ العدد المشتق للدالة $f(x) = x^2 + 2x$ في العدد -1 هو 0 .

معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة التي أفصولها -1 هي : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$y = -1$

نقول إن (C_f) يقبل مماسا أفقيا معادلته $y = -1$.

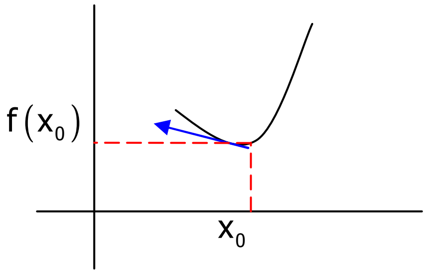


2 ـ نصف المماس :

تعريف 1:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[x_0, x_0 + a[$.

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 فإن (C_f) يقبل نصف مماس في النقطة التي أفصولها x_0 معادلته : $y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.



تعريف 2:

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]x_0 - a, x_0]$.

إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على يسار x_0 فإن (C_f) يقبل نصف مماس في النقطة التي أفصولها x_0 معادلته : $y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

ملاحظة :

* إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين x_0 (أو على يسار x_0) و كان $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ (أو $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$)

نقول إن (C_f) يقبل نصف مماس أفقي على يمين x_0 (أو على يسار x_0) .

* إذا كانت الدالة f غير قابلة للإشتقاق على يمين x_0 (أو على يسار x_0) و كان $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ (أو $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$) نقول إن (C_f) يقبل نصف مماس عمودي على يمين x_0 (أو على يسار x_0) .

مثال :

**لندرس قابلية إشتقاق الدالة $f(x) = x^2 - x$ على يمين 1 و نأول النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين 1 .

(C_f) يقبل نصف مماس على يمين 1 معادلته : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = x - 1$

**لندرس قابلية إشتقاق الدالة $f(x) = x^2 - x$ على يسار $\frac{1}{2}$ و نأول النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\frac{4x^2 - 4x + 1}{4}}{\frac{4x - 2}{4}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x - 2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{(2x-1)^2}{2(2x-1)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{2x - 1}{2} = 0$$

الدالة f قابلة للإشتقاق على يسار $\frac{1}{2}$.

(C_f) يقبل نصف مماس أفقي على يسار $\frac{1}{2}$ معادلته : $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

$$y = \frac{-1}{4}$$

مثال :

**لندرس قابلية إشتقاق الدالة $f(x) = \sqrt{x-1}$ على يمين 1 و نأول النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

الدالة f غير قابلة للإشتقاق على يمين 1 .

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي على يمين 1 معادلته : $x = 1$

V ـ الدالة المشتقة :

1 ـ تعاريف :

** نقول إن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال المفتوح I إذا كانت f قابلة للإشتقاق في كل نقطة من I .

** نقول إن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $[ab]$ إذا كانت f قابلة للإشتقاق على المجال $]ab[$ و على يمين a و يسار b .

** لتكن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I.

الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f نرمز لها بـ f' .

** لتكن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I.

إذا كانت الدالة f' قابلة للإشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية و نرمز لها بـــ f'' .

2 ـ مشتقة الدوال الإعتيادية :

$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = \mathbb{R}^+$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^{+*}$
$f(x) = \sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$

3 ـ العمليات على الدوال المشتقة :

خاصية : لتكن f و g دالتين قابلتين للإشتقاق في x_0 و λ عدد حقيقي .

** **الدالة $f+g$ قابلة للإشتقاق في x_0 و لدينا :** $(f+g)' = f' + g'$.

مثال :

$f(x) = x^3 + x^2 + \sqrt{x}$ *

$$f'(x) = (x^3)' + (x^2)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 + 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$f(x) = \sin x + \cos x + x^5 + 4$ *

$$f'(x) = (\sin x)' + (\cos x)' + (x^5)' + (4)' = \cos x - \sin x + 5x^4$$

** **الدالة λf قابلة للإشتقاق في x_0 و لدينا :** $(\lambda f)' = \lambda f'$.

مثال :

$f(x) = 5\sin x$ *

$$f'(x) = (5\sin x)' = 5(\sin x)' = 5\cos x$$

$f(x) = -3\sqrt{x}$ *

$$f'(x) = (-3\sqrt{x})' = -3(\sqrt{x})' = -3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-3}{2\sqrt{x}}$$

** **الدالة $f \times g$ قابلة للإشتقاق في x_0 و لدينا :** $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

مثال :

$f(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ *

$$f'(x)=\left(\left(x^2+x\right)\sqrt{x}\right)'=\left(x^2+x\right)'\times\sqrt{x}+\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x}\right)'$$
$$=\left(2x+1\right)\times\sqrt{x}+\left(x^2+x\right)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\left(2x+1\right)\times\sqrt{x}\times2\sqrt{x}+\left(x^2+x\right)}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{4x^2+2x+x^2+x}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2+3x}{2\sqrt{x}}$$

* $f\left(x\right)=x^3\sin x$

$$f'\left(x\right)=\left(x^3\sin x\right)'=\left(x^3\right)'\times\sin x+x^3\times\left(\sin x\right)'=3x^2\sin x+x^3\cos x$$

** إذا كان $g'\left(x_0\right)\neq0$ الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)'$ قابلة للإشتقاق في x_0 و لدينا : $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$.

مثال :

* $f\left(x\right)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{x^2+x}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2+x\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$=\frac{\left(2x+1\right)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$=\frac{2x^3+2x+x^2+1-2x^3-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+2x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

* $f\left(x\right)=\frac{2\sqrt{x}}{x^2-1}$

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{2\sqrt{x}}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(2\sqrt{x}\right)'\left(x^2-1\right)-\left(2\sqrt{x}\right)\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$=\frac{2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\left(x^2-1\right)-2\sqrt{x}\times2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$
$$=\frac{\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}-4x\sqrt{x}}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}-\frac{4x^2}{\sqrt{x}}}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2-1-4x^2}{\sqrt{x}\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-3x^2-1}{\sqrt{x}\left(x^2-1\right)^2}$$

4 ـ رتابة دالة و إشارة مشتقتها :

مبرهنة:

لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال I .

** إذا كانت f' منعدمة على I فإن f تكون ثابتة على I .

** إذا كانت f' موجبة على I فإن f تكون تزايدية على I .

** إذا كانت f' سالبة على I فإن f تكون تناقصية على I .

مثال :

ــ لنحدد الدالة المشتقة للدالة f و نضع جدول تغييراتها.

1 $f\left(x\right)=x^3-2x^2+4$

** الدالة المشتقة : $f'\left(x\right)=\left(x^3-2x^2+4\right)'=3x^2-4x$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

** إشارة الدالة f' : نحسب مميز ثلاثية الحدود $3x^2-4x$ نحصل على حلين مختلفين هما :0 و $\frac{4}{3}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2-4x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

** جدول تغييرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{76}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

2 $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+1}$

** الدالة المشتقة :
$$f'(x)=\left(\frac{x^2-4}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2-4)'(x^2+1)-(x^2-4)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-4)2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{2x^3+2x-2x^3+8x}{(x^2+1)^2}=\frac{10x}{(x^2+1)^2}$$

** جدول تغييرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	1

4 ـ مطراف دالة قابلة للإشتقاق على مجال I :

خاصية :

ليكن I مجال مفتوح و x_0 عنصرا من المجال I .

ـ إذاكانت الدالة f قابلة للإشتقاق في x_0 و تقبل مطرافا في x_0 فإن : $f'(x_0)=0$.

ـ إذا كان $f'(x_0)=0$ و كانت f' تغير إشارتها بجوار x_0 فإن f تقبل مطرافا في x_0 .

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr