

القدرات المستهدفة

- حساب نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية و الدوال اللا جذرية .
- حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال الدوال الإعتيادية .

I- النهاية المنتهية :1 - النهاية 0 عند 0 :تعريف :

- لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0 .
- نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0 إذا كان :
- لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر $\alpha > 0$ بحيث لكل x من $]-\alpha, \alpha[- \{0\}$ يكون $|f(x)| < \varepsilon$.
- و نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

خاصية :

- الدوال المعرفة على الشكل : $f(x) = ax^n$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى 0 .

أمثلة :

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} -4x^3 = 0$$

- الدوال المعرفة على الشكل : $f(x) = a\sqrt{|x|}$ بحيث $a \in \mathbb{R}$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى 0 .

أمثلة :

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{|x|} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{|x|} = 0$$

2 - النهاية l عند x_0 :تعريف :

- لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .
- نقول إن نهاية f هي l عندما يؤول x إلى x_0 إذا كان :
- $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - l = 0$.

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 4} 2\sqrt{|x|} = 4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 = 3$$

3 - النهاية على اليمين و على اليسار :تعريف :

- لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]x_0, x_0 + \alpha[$ بحيث $\alpha > 0$.
- نقول إن f تقبل النهاية l في x_0 على اليمين إذا كان قصورها على مجال $]x_0, x_0 + a[$ حيث $a > 0$ ينطبق مع قصور دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 و نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ أو $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$.

خاصية :

- تكون لدالة f نهاية عند x_0 إذا و فقط إذا كانت لها نفس النهاية على اليمين و على اليسار في x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

مثال :

- نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $\begin{cases} f(x) = 2x - 3 & (x \geq 1) \\ f(x) = -x & (x < 1) \end{cases}$ لندرس نهاية الدالة f عند العدد 1 .

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1 \quad \text{فإن } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

4 - النهاية 0 عند $+\infty$:تعريف :

- لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a, +\infty[$.
- نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر $B > 0$ بحيث لكل x من المجال $]B, +\infty[$ يكون $|f(x)| < \varepsilon$.
- و نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

خاصية :

الدوال المعرفة على الشكل : $f(x) = \frac{k}{x^n}$ و $g(x) = \frac{k}{\sqrt{|x|}}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $k \in \mathbb{R}$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى $+\infty$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^4} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^3} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{|x|}} = 0$$

5- النهاية l عند $+\infty$:

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a, +\infty[$.
تكون نهاية f هي l عندما يؤول x إلى $+\infty$
إذا و فقط إذا كانت نهاية الدالة $f(x) - l$ هي 0 عند $+\infty$ و نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

6- النهاية l عند $-\infty$:

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]-\infty, b[$.
تكون نهاية f هي l عندما يؤول x إلى $-\infty$
إذا و فقط إذا كانت نهاية الدالة $f(-x)$ هي l عند $+\infty$
بمعنى : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = l$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1$$

خصائص النهايات و الترتيب :

إذا كان على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 $|f(x) - l| \leq u(x)$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

إذا كان على مجال من نوع $]a, +\infty[$ $|f(x) - l| < u(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

إذا كان على مجال من نوع $]-\infty, b[$ $|f(x) - l| < u(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

7- إتصال دالة :

تعريف :

تكون دالة f متصلة في x_0 إذا و فقط إذا كانت لها نهاية في x_0 تساوي $f(x_0)$

يعني : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

مثال :

$$\cdot \begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة على الشكل :}$$

لنبين ان f متصلة في 0 .

$$\cdot \text{ لدينا : } \left| f(x) - 0 \right| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| < |x| \quad \text{لدينا } |\sin(x)| < 1$$

و لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ و منه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ إذن f متصلة في 0 .

خاصية :

كل دالة حدودية متصلة في كل نقطة من \mathbb{R} .

كل دالة جذرية متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها .

مثال :

بمعنى لحساب نهاية دالة حدودية في عدد حقيقي نقوم بتعويض المجهول بالعدد .

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - x + 4) = 2(1)^2 - 1 + 4 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 2x - 1) = (-2)^2 + 2(-2) - 1 = 4 - 4 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{5}{3}$$

8 - تمديد باتصال :

تعريف :

لنكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية l في x_0 .

الدالة المعرفة كمايلي $\begin{cases} g(x)=f(x)(x \in Df) \\ g(x_0)=l \end{cases}$ هي دالة متصلة في x_0 تسمى تمديد باتصال للدالة f في x_0 .

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ الغير معرفة في العدد 3 .

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} x+3 = 3+3 = 6 \quad \text{فإن} \quad \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$$

ومنه الدالة g المعرفة على الشكل : $\begin{cases} g(x)=f(x)(x \neq 3) \\ g(3)=6 \end{cases}$ تنطبق مع الدالة f على $\mathbb{R} - \{3\}$ و متصلة في 3 .

الدالة g تسمى تمديدا باتصال للدالة f في 3

9 - الإتصال على اليمين و على اليسار :

خاصية :

تكون الدالة f متصلة في x_0 إذا و فقط إذا كانت متصلة على اليمين و على اليسار في x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

10 - العمليات على النهايات المنتهية :

f و g دالتان و λ عدد حقيقي. إذا كانت f و g لهما نهاية في x_0 .

$$\lim(f+g) = \lim f + \lim g$$

$$\lim(f \times g) = \lim f \times \lim g$$

$$\lim(\lambda f) = \lambda \lim f$$

إذا كانت g غير منعدمة فإن

$$\lim\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{\lim g}$$

$$\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim f}{\lim g}$$

$$\lim|f| = |\lim f|$$

$$\lim\sqrt{f} = \sqrt{\lim f} \quad \text{فإن} \quad f \text{ موجبة على مجال مفتوح منقط مركزه } x_0$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[(x^2 - x + 1) + (\sqrt{x+7}) - \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x-1}} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1) + \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+7}) - \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x-1}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1) = 2^2 - 2 + 1 = 3 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+7}) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (x+7)} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{و لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x-1}} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2+4}{x-1} \right)} = \sqrt{\frac{2^2+4}{2-1}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{و لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[(x^2 - x + 1) + (\sqrt{x+7}) - \left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x-1}} \right) \right] = 3 + 3 - 2\sqrt{2} = 6 - 2\sqrt{2}$$

ومنه

II- النهاية اللانتهية :

1- النهاية $+\infty$ عند 0 :

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0 .
نقول إن f تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى 0 إذا كان :
لكل $A > 0$ يوجد عنصر $\alpha > 0$ بحيث لكل x من $]-\alpha, \alpha[- \{0\}$ يكون $f(x) > A$.

و نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

خاصية :

الدوال المعرفة على الشكل : $f(x) = \frac{k}{x^n}$ و $g(x) = \frac{k}{\sqrt{x}}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $k \in \mathbb{R}^{*+}$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى 0 على اليمين .

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{|x|}} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{x^3} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^4} = +\infty$$

2- النهاية $+\infty$ عند x_0 :

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .
نقول إن f تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى x_0 إذا كانت الدالة $f(x_0 + h)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول h إلى 0 .

و نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{\sqrt{(x-2)^2}} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^2} = +\infty$$

3- النهاية $+\infty$ عند $+\infty$:

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a, +\infty[$.
نقول إن نهاية f هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$
إذا كان لكل $A > 0$ يوجد عنصر $B > 0$ بحيث لكل x من المجال $]B, +\infty[$ يكون $f(x) > A$.

و نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

خاصية :

الدوال المعرفة على الشكل : $f(x) = kx^n$ و $g(x) = k\sqrt{x}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $k \in \mathbb{R}^{*+}$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$.

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3\sqrt{x} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = +\infty$$

4- النهاية $-\infty$ عند $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 :

خاصية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-f(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$$

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

خاصيات النهايات و الترتيب :

إذا كان $f(x) \geq u(x)$ و $\lim u(x) = +\infty$ فإن $\lim f(x) = +\infty$

إذا كان $f(x) \leq u(x)$ و $\lim u(x) = -\infty$ فإن $\lim f(x) = -\infty$

5 - العمليات على النهايات اللامنتهية و الأشكال الغير المحددة :

نهاية مجموع

نهاية f	نهاية g	نهاية f+g
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

نهاية دالة في عدد حقيقي

نهاية f	إشارة λ	نهاية λf
$+\infty$	موجبة	$+\infty$
$+\infty$	سالبة	$-\infty$
$-\infty$	موجبة	$-\infty$
$-\infty$	سالبة	$+\infty$

نهاية جداء

نهاية f	نهاية g	نهاية fg
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	شكل غير محدد
$-\infty$	0	شكل غير محدد

نهاية مقلوب دالة

نهاية f	نهاية مقلوب f
$+\infty$	0^+
0^+	$+\infty$
$-\infty$	0^-
0^-	$-\infty$

نهاية خارج

نهاية f	نهاية g	نهاية خارج f على g
∞	∞	شكل غير محدد
0	0	شكل غير محدد
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^-	$-\infty$
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0

III- نهاية الدوال المثلثية :

خاصية :

الدوال المثلثية : $\sin(x)$ و $\cos(x)$ و $\tan(x)$ متصلة في مجموعة تعريفها .

نهاية الدوال المثلثية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

