دراسة و تمثيل الدوال الحدودية من الدرجة الثانية و الثالثة و دوال متخاطة

مثال1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-x-1$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
2) احسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة تعريف الدالة f
3) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
4) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

الجواب

(1

$D_f=\mathbb{R}=\left]-\infty,+\infty\right[$ لأن f دالة حدودية

(2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2-x-1 =\lim_{x\to+\infty} x^2 =+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2-x-1 =\lim_{x\to-\infty} x^2 =+\infty$$

(3

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=2x-1$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2x-1$.

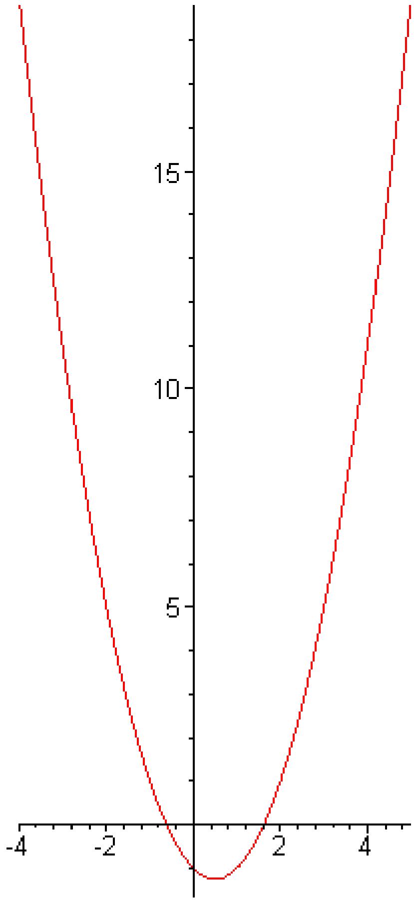
لكل x من $\mathbb{R}$:

- ♦ $f'(x)=0$ تكافئ $2x-1=0$ أي $x=\dfrac{1}{2}$
- ♦ $f'(x)\succ 0$ تكافئ $2x-1\succ 0$ أي $x\succ\dfrac{1}{2}$
- ♦ $f'(x)\prec 0$ تكافئ $2x-1\prec 0$ أي $x\prec\dfrac{1}{2}$

<u>جدول تغيرات الدالة f</u>

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

(4



مثال2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
2) احسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة تعريف الدالة f
3) هل منحنى الدالة f يقبل مقاربات أفقية ؟ عمودية؟
4) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}-\{2\}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
5) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ مستعينا بجدول التغيرات و جدول لصور بعض القيم

الجواب

(1

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R} / x-2\neq 0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} / x\neq 2\} \\ &= \mathbb{R}-\{2\} \\ &=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[\end{aligned}$$

(2

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}}\frac{2x-1}{x-2}=+\infty$$

لأن

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} 2x-1=3$$

و

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} x-2=0^+$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}}\frac{2x-1}{x-2}=-\infty$$

لأن

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} 2x-1=3$$

و

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} x-2=0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$$

(3

- بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ فإن المستقيم $y=2$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

- بما أن $\lim_{\substack{x\to 2\\ x\prec 2}} f(x)=-\infty$ و $\lim_{\substack{x\to 2\\ x\succ 2}} f(x)=+\infty$ فإن $x=2$ مقارب رأسي لمنحنى الدالة f بجوار 2 على اليسار و على اليمين .

(4

لكل $x\neq 2$:

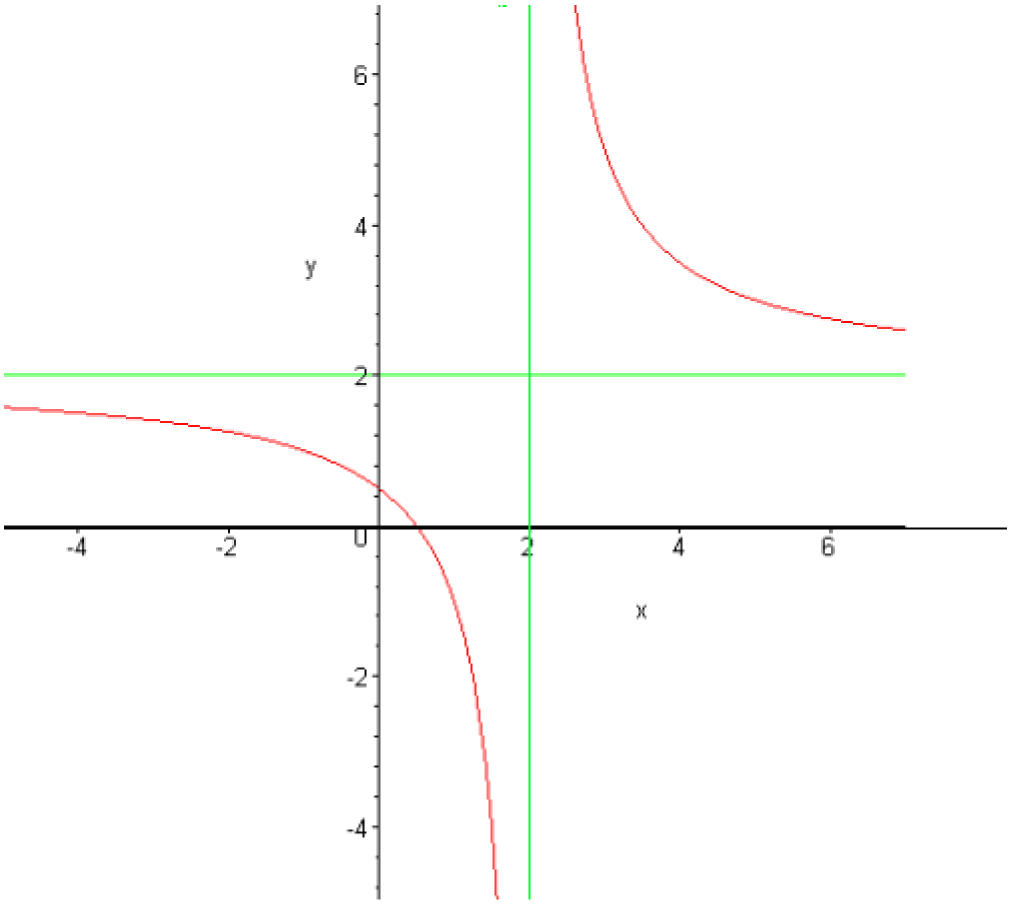
$$f'(x)=\frac{(2)(x-2)-(2x-1)(1)}{(x-2)^2}=\frac{2x-4-2x+1}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}\prec 0$$

إذن الدالة f تناقصية قطعا على كل من المجالين $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$

<u>جدول تغيرات الدالة f</u>

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2$

(5



مثال3

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
2) احسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة تعريف الدالة f
3) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
4) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجواب

(1

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$ لأن f دالة حدودية

(2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6 = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6 = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$$

(3

لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -3x^2 + 3x = -3x(x-1)$$

الثلاثية $-3x^2+3x$ أي $-3x\left(x-1\right)$ تنعدم عند 1 أو 0 .مع $f(1)=-1+\frac{3}{2}+6=\frac{13}{2}$ و $f(0)=6$.

<u>جدول تغيرات الدالة f</u>

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$\frac{17}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

(4