الأولى علوم رياضية	تمارين حول المجموعات و التطبيقات	Prof : BEN ELKHATIR

• تمرين01:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث : $a<b$.

1)- حدد جميع قيم العدد r من $\mathbb{R}_+^*$ التي يكون من أجلها : $]a,a+r[\cap]b-r,b[=\varnothing$.

2)- بين أنه يوجد عدد وحيد r من $\mathbb{R}_+^*$ (يتم تحديده) بحيث : $]a,a+r[=]b-r,b[$.

3)- حدد جميع قيم العدد r من $\mathbb{R}_+^*$ التي يكون من أجلها : $]a,a+r[\cap]b-r,b[=]a,b[$.

• تمرين02:

1)- نعتبر المجموعتين : $A=\{1+2k\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$ و $B=\left\{\frac{-1+2k}{3}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

بين أن B يتضمن A و أن $A\neq B$ ، أي أن : $A\subsetneq B$.

2)- بين أن المجموعتين : $C=\left\{\frac{4k+5}{10}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ و $D=\left\{\frac{8k+5}{20}\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

منفصلتين ، أي أن : $C\cap D=\varnothing$.

• تمرين03:

1)- حل في المجموعة $\mathcal{P}(E)$ النظمة : $(S_1):\begin{cases}A\cap X=B\\A\cup X=C\end{cases}$ إذا علمت أن A و B و C

ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة غير فارغة E بحيث : $B\subsetneq A\subsetneq C$.

2)- إستنتج حل النظمة : $(S_2):\begin{cases}A\setminus X=B\\X\setminus A=C\end{cases}$ في المجموعة $\mathcal{P}(E)$ إذا علمت أن :

$B\subsetneq A\subsetneq \overline{C}$.

• تمرين04:

نعتبر المجموعات التالية :

$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2\le1\right\}$ و $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\begin{cases}x^2\le y\\y^2\le x\end{cases}\right\}$

و $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^3-y^3<1<x-y\right\}$.

تحقق من أن E و F و G مجموعات غير فارغة ، ثم بين أن :

$E\subsetneq[-1,1]\times[-1,1]$ و $F\subsetneq[0,1]\times[0,1]$ و $G\subsetneq]0,1[\times]-1,0[$.

• تمرين05:

نعتبر التطبيق : $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\dfrac{x}{1+|x|}\end{array}\right.$.

1)- بين أن f تطبيق تبايني .

2)- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}:|f(x)|<1$ ، ثم أدرس شمولية التطبيق f .

3)- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده ، ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

• تمرين06:

نعتبر التطبيق : $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{N}\to\mathbb{N}\\ n\mapsto n+(-1)^n\end{array}\right.$.

1)- أحسب $f\circ f(0)$ و $f\circ f(1)$ و $f\circ f(2)$ ، ثم حدد $f\circ f(n)$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2)- بين أن f تقابل ، ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

• تمرين07:

نعتبر التطبيق : $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{x^2-x+1}\end{array}\right.$.

1)- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}:f(1-x)=f(x)$ ، ثم أدرس تباينية التطبيق f .

2)- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}:f(x)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ثم أدرس شمولية التطبيق f .

3)- ليكن g و h قصورا f على المجالين $I=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ و $J=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ على التوالي .

أ- بين أن g تقابل من المجال I نحو المجال $K=\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$ ، ثم حدد تقابله العكسي g^{-1} .

ب- نعتبر التطبيق : $k:\left|\begin{array}{l}J\to I\\ x\mapsto1-x\end{array}\right.$ ، بين أن : $h=g\circ k$ ، ثم إستنتج أن h تقابل

و حدد تقابله العكسي h^{-1} .

- **تمرين08:**

ليكن f و g تطبيقين من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{N}$ بحيث : $f(n)=2n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ،

$g(n)=\frac{n}{2}$ إذا كان n زوجيا و $g(n)=\frac{n-1}{2}$ إذا كان n فرديا .

1)- أدرس تباينية و شمولية التطبيقين f و g ، لما يكون f أو g تقابلا حدد تقابله العكسي .

2)- حدد التطبيقين $g\circ f$ و $f\circ g$ ، هل $g\circ f$ و $f\circ g$ تقابلين ؟

- **تمرين09:**

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية بحيث : $c\neq 0$ و $a^2+bc\neq 0$.

و ليكن f التطبيق : $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}\\ x\mapsto\frac{ax+b}{cx-a}\end{array}\right.$.

1)- تحقق من أن التطبيق f معرف بالفعل .

2)- حدد $f\circ f$ ، ثم إستنتج أن f تقابل و حدد تقابله العكسي f^{-1} .

- **تمرين10:**

ليكن f تطبيقا من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{Z}$ بحيث :

$f(n)=\frac{n}{2}$ إذا كان n زوجيا و $f(n)=-\frac{n+1}{2}$ إذا كان n فرديا .

بين أن f معرف بالفعل ، و أنه تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

- **تمرين11:**

لتكن E مجموعة غير فارغة و f تطبيق من E نحو E بحيث : $f\circ f\circ f=f$.

1)- بين أنه إذا كان f تباينيا فإن : $f\circ f=id_E$ ، ثم إستنتج أن f تقابل من E نحو E و حدد تقابله العكسي f^{-1} .

2)- بين أنه إذا كان f شموليا فإن : $f\circ f=id_E$ ، ثم إستنتج أن f تقابل من E نحو E و حدد تقابله العكسي f^{-1} .

- **تمرين12:**

ليكن $f:E\to F$ و $g:F\to E$ تطبيقين بحيث $f\circ g\circ f$ تقابل من E نحو F

بين أن التطبيقين f و g تقابلين .

- **تمرين13:**

1)- ليكن $f:E\to F$ تطبيقا شموليا و $g_1,g_2:F\to G$ تطبيقين بحيث $g_1\circ f=g_2\circ f$ ، بين أن : $g_1=g_2$.

2)- ليكن $g:F\to G$ تطبيقا تباينيا و $f_1,f_2:E\to F$ تطبيقين بحيث $g\circ f_1=g\circ f_2$ ، بين أن : $f_1=f_2$.

- **تمرين14:**

ليكن $f:E\to F$ و $g:F\to G$ تطبيقين ، بين أن :

(f تبايني) $\Leftarrow$ ($g\circ f$ تبايني) و (g شمولي) $\Leftarrow$ ($g\circ f$ شمولي)

و (g تبايني) $\Leftarrow$ (f شمولي و $g\circ f$ تبايني)

و (f شمولي) $\Leftarrow$ (g تبايني و $g\circ f$ شمولي) .

- **تمرين15:**

لتكن $f:E\to F$ و $g:F\to G$ و $h:G\to E$ ثلاث تطبيقات بحيث :

التطبيق $h\circ g\circ f$ تبايني و التطبيقين $g\circ f\circ h$ و $f\circ h\circ g$ شموليين .

بين أن f و g و h تطبيقات تقابلية .

- **تمرين16:**

ليكن $f:E\to I$ تطبيقا شموليا ، و لكل i من I نضع : $A_i=f^{-1}(\{i\})$ ، بين أن :

$\forall i\in I : A_i\neq\varnothing$ و $\forall(i,j)\in I^2/i\neq j : A_i\cap A_j=\varnothing$ و $\bigcup_{i\in I}A_i=E$

- **تمرين17:**

لكل جزئين غير فارغين A و B من مجموعة E ، نعتبر التطبيق :

$f:\left|\begin{array}{l}\mathrm{P}(E)\to\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)\\ X\mapsto(A\cap X,B\cap X)\end{array}\right.$.

1)- بين أن :

(f تبايني) $A\cup B=E \Leftrightarrow$ و (f شمولي) $A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow$

2)- حدد شرطا كافيا و لازما لكي يكون التطبيق f تقابلا ، ثم حدد في هذه الحالة تقابله العكسي f^{-1} .

- **تمرين18:**

نعتبر التطبيق : $f:\begin{cases}\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^* \\ n \mapsto E\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)\end{cases}$.

1)- أحسب $f(1)$ و $f(2)$ ، ثم أدرس تباينية التطبيق f .

2)- بين بالترجع أن: $\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^* / f(n)=m$ ، ثم إستنتج أن التطبيق f شمولي .

- **تمرين19:**

نعتبر التطبيق : $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y,xy)\end{cases}$.

1)- بين أن : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(y,x)=f(x,y)$ ، هل f تطبيق تبايني ؟

2)- بين أن التطبيق f ليس شموليا .

3)- نعتبر المجموعتين :

$A=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x \le y\}$ و $B=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2-4y \ge 0\}$.

بين أن : $f(A)=B$.

4)- ليكن g قصور f على المجموعة A .

بين أن g تقابل من A نحو B ، ثم حدد تقابله العكسي g^{-1} .

- **تمرين20:**

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a<b$ و f تطبيق من $[a,b]$ نحو $[a,b]$ يحقق :

$(1): \forall (x,y) \in [a,b]^2 : |f(x)-f(y)| \ge |x-y|$.

1)- بين أن $|f(b)-f(a)|=b-a$ ، ثم إستنتج أن : $\begin{cases}f(a)=a \\ f(b)=b\end{cases}$ أو $\begin{cases}f(a)=b \\ f(b)=a\end{cases}$.

2)- بين أن هناك تطبيقين فقط يحققان العلاقة (1) و حددهما .

- **تمرين21:**

E و F مجموعتان غير فارغتين ، و A و B جزءان من E و F على التوالي بحيث :

$\varnothing \subsetneq A \subsetneq E$ و $\varnothing \subsetneq B \subsetneq F$.

ليكن f تطبيقا من A نحو B و g تطبيقا من $\overline{A}$ نحو $\overline{B}$.

و h التطبيق المعرف من E نحو F بما يلي : $h(x)=\begin{cases}f(x);x\in A \\ g(x);x\in \overline{A}\end{cases}$.

1)- بين أن : (h تبايني إذا و فقط إذا كان f و g تباينيين)

و (h شمولي إذا و فقط إذا كان f و g شموليين)

2)- إستنتج أنه إذا كان f و g تقابلين فإن h تقابل ، و حدد تقابله العكسي h^{-1} .

3)- نعتبر التطبيق : $\theta:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases}\sqrt{x};x\ge 0 \\ -\sqrt{-x};x<0\end{cases}\end{cases}$ ، بين أن θ تقابل و حدد تقابله العكسي θ^{-1} .

- **تمرين22:**

ليكن A جزءا غير فارغ من مجموعة E ، نضع :

$\mathrm{P}_+(A)=\{B\in \mathrm{P}(E)/A\subseteq B\}$ و $\mathrm{P}_-(A)=\{B\in \mathrm{P}(E)/B\subseteq A\}$

و نعتبر التطبيق : $f:\begin{cases}\mathrm{P}(E)\to \mathrm{P}_-(A)\times \mathrm{P}_+(A) \\ X \mapsto (A\cap X, A\cup X)\end{cases}$.

بين أن f تقابل و حدد تقابلة العكسي f^{-1} .

- **تمرين23:**

ليكن $f:E\to F$ تطبيقا ، نعتبر التطبيقين :

$\varphi:\begin{cases}\mathrm{P}(E)\to \mathrm{P}(F) \\ A\mapsto f(A)\end{cases}$ و $\psi:\begin{cases}\mathrm{P}(F)\to \mathrm{P}(E) \\ B\mapsto f^{-1}(B)\end{cases}$.

1)- بين أنه إذا كان f تطبيقا تباينيا فإن φ تبايني و ψ شمولي .

2)- بين أنه إذا كان f تطبيقا شموليا فإن φ شمولي و ψ تبايني .

3)- إستنتج أنه إذا كان f تقابلا فإن φ و ψ تقابلين .

4)- حدد التطبيقين : $\varphi\circ\psi$ و $\psi\circ\varphi$ ، ثم إستنتج φ^{-1} و ψ^{-1} التقابلين العكسيين للتقابلين φ و ψ .

- **تمرين24:**

1)- ليكن f تطبيقا من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث : $\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f \circ f(x) = 2x - 1$.

بين أن : $f(1) = 1$.

2)- بين أنه يوجد تطبيق تآلفي وحيد f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} f \circ f(x) = 4x + 3 \\ f \circ f \circ f(x) = 8x + a \end{cases}$$

ثم حدد في هذه الحالة العدد الحقيقي a .

- **تمرين25:**

1)- أوجد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق :

$(1) : \forall x \in \mathbb{R} : 5f(x) + f(1-x) = x + 2$.

2)- أوجد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق :

$(2) : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x)f(y) = x + y + f(xy)$.

3)- أوجد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق :

$(3) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} : f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + 1$.

4)- أوجد جميع التطبيقات f من $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ نحو $\mathbb{R}$ التي تحقق :

$(4) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} : f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x + 1$.

abouzakariya@yahoo.fr