I- زوجية دالة عددية:

1)- أنشطة:

- **تمرين01:**

أدرس زوجية الدالة العددية f في كل حالة من الحالات التالية :

$(1): f(x)=x^3+\frac{1}{x^2}$ و $(2): f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$ و $(3): f(x)=x^3+\frac{1}{1-|x|^3}$

$(4): f(x)=2x^2-(|x+3|+|x-3|)$ و $(5): f(x)=3x-|3x-2|+|3x+2|$

$(6): f(x)=\frac{x^3}{x^2-2|x|-3}$ و $(7): f(x)=\sqrt{-x^2+|x|+6}$.

- **تمرين02:**

لتكن f دالة دالة زوجية معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x)=3-2x$ لكل x من $\mathbb{R}_+$.

1. أنشىء المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. عبر عن $f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_-$.

- **تمرين03:**

لتكن g دالة فردية معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث :

$$g(x)=\begin{cases}x+3; x\le -1\\ -2x; -1\le x\le 0\end{cases}$$.

1. أنشىء المنحنى (C_g) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. عبر عن $g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+$.

2)- ملخص:

- **تعريف:**

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f ، نقول إن f دالة زوجية إذا كان :

$$\begin{cases}-x\in D_f\\ f(-x)=f(x)\end{cases}$$ لكل x من D_f .

و نقول إن f دالة فردية إذا كان : $\begin{cases}-x\in D_f\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$ لكل x من D_f .

- **ملحوظة:**

إذا كانت f دالة فردية و كان $0\in D_f$ فإن : $f(0)=0$ ، وهذا يعني أن (C_f) يمر بالضرورة من أصل المعلم .

- **خاصية01:**

ليكن (C_f) منحنى دالة عددية f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان منحناها (C_f) متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب (Oy) .

و تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كان منحناها (C_f) متماثلا بالنسبة لأصل المعلم O .

- **تمرين04:**

نعتبر الدوال العددية f و g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=-x(2+x)$ و $g(x)=|x|(2-|x|)$ و $h(x)=x(2-|x|)$.

1. أنشىء المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. بين أن g دالة زوجية و h دالة فردية .

3. بين أن : $g(x)=f(x)$ و $h(x)=-f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_-$.

ثم أنشىء (C_g) و (C_h) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ إنطلاقا من (C_f) .

II- مقارنة دالتين عدديتين:

1)- الدالة الموجبة و الدالة السالبة:

- **تقديم:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $f(x)=-x^3+2x+1$.

1. بين أن الحدودية f تقبل جذرا بديهيا يتم تحديده ، ثم إستنتج تعميلا لها .

2. أنشيء جدولا تحدد فيه إشارة $f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة :

$$(I): f(x)\ge 0$$

- **تعريف:** لتكن f دالة عددية و D جزء من مجموعة تعريفها D_f .

- نقول إن f موجبة على D و نكتب : $f\ge 0$ على D إذا كان :

$f(x)\ge 0$ لكل x من D .

- و نقول إن f سالبة على D و نكتب : $f\le 0$ على D إذا كان :

$f(x)\le 0$ لكل x من D .

- **خاصية02:**

ليكن (C_f) منحنى دالة عددية f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تكون الدالة f موجبة على D_f إذا و فقط إذا كان (C_f) فوق محور الأفاصيل

و تكون f سالبة على D_f إذا و فقط إذا كان (C_f) تحت محور الأفاصيل .

- **تمرين05:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{-x^2+x+6}$.

1. حدد D_f ، ثم أنشىء جدولا تحدد فيه إشارة الدالة f .

2. إستنتج الوضع النسبي لمنحنى الدالة f بالنسبة لمحور الأفاصيل .

2)- مقارنة دالتين عدديتين:

- **تعريف:**

لتكن f و g دالتين عدديتين و D جزء من $D_f \cap D_g$.

نقول إن f أصغر من أو تساوي g على D و نكتب : $f \leq g$ على D إذا كان :

$g-f \geq 0$ على D .

نقول إن f أصغر قطعا من g على D و نكتب : $f \prec g$ على D إذا كان :

$g-f \succ 0$ على D .

- **مثال:** قارن الدالتين العدديتين f و g في كل حالة من الحالتين :

$$(1):\begin{cases} f(x)=-x^2+x-1 \\ g(x)=x^3-3x^2+2x-1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (2):\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1} \\ g(x)=x+1 \end{cases} .$$

- **تمرين06:**

1. قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي :

$$f(x)=\frac{1+4x}{(1+6x)^2} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{(1-5x)^2}{1-2x} .$$

2. قارن العددين A و B حيث :

$$A=\frac{1,0000004}{(1,0000006)^2} \quad \text{و} \quad B=\frac{(0,9999995)^2}{0,9999998} .$$

- **خاصية03:**

نعتبر دالتين عدديتين f و g معرفتين على مجموعة D .

تكون f أصغر من أو تساوي g على D إذا و فقط إذا كان (C_f) تحت (C_g) على D .

- **تمرين07:**

حدد وضع منحنى الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ بالنسبة

للمستقيم (D) الذي معادلته : $y=\dfrac{x}{2}$.

3)- الدالة المكبورة و الدالة المصغورة:

- **تقديم:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2-\sqrt{3}x}{x^2+1}$.

بين أن : $-\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .

- **تعريف:**

ليكن M و m عددين حقيقيين

نقول إن f مكبورة بالعدد M إذا كان : $f(x) \leq M$ لكل x من D_f .

نقول إن f مصغورة بالعدد m إذا كان : $f(x) \geq m$ لكل x من D_f .

إذا كانت f مكبورة و مصغورة نقول إنها دالة محدودة .

- **أمثلة:**

- الدالة : $f : x \mapsto \dfrac{x^2-\sqrt{3}x}{x^2+1}$ مكبورة بالعدد $\dfrac{3}{2}$ و مصغورة بالعدد $-\dfrac{1}{2}$

إذن فهي دالة محدودة .

- الدوال السالبة مكبورة بالعدد 0 ، والدوال الموجبة مصغورة بالعدد 0 .

- **خاصية04:**

تكون الدالة العددية f مكبورة بالعدد M إذا و فقط إذا كان منحناها (C_f) تحت المستقيم

الذي معادلته : $y=M$.

و تكون f مصغورة بالعدد m إذا وفقط إذا كان (C_f) فوق المستقيم الذي معادلته : $y=m$.

بصفة خاصة : منحنى دالة سالبة يكون تحت محور الأفاصيل و منحنى دالة موجبة يكون فوق محور الأفاصيل .

- **خاصية05:**

تكون f دالة محدودة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب قطعا α يحقق :

$\left|f\left(x\right)\right| \le \alpha$ لكل x من D_f .

- **تمرين08:** نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+4}$ و $g\left(x\right)=\dfrac{x^2-4x}{x^2+4}$.

1. بين أن : $\left|f\left(x\right)\right| \le \dfrac{1}{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم اعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة .

2. إستنتج ان g دالة محدودة ، و أن $\left(C_g\right)$ محصور بين مستقيمين يوازيان $\left(Oy\right)$ يتم تحديد معادلتيهما .

III- الدوال الدورية:

1)- تعريف:

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و T عدد حقيقي موجب قطعا .

نقول إن f دورية دورها T إذا كان T هو أصغر عدد حقيقي موجب قطعا يحقق :

$\begin{cases} x+T \in D_f \; ; x-T \in D_f \\ f\left(x+T\right)=f\left(x\right)=f\left(x-T\right) \end{cases}$ لكل x من D_f .

- **أمثلة:**

- لدينا : $\begin{cases} \cos\left(x+2k\pi\right)=\cos x \\ \sin\left(x+2k\pi\right)=\sin x \end{cases}$ لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$.

إذن الدالتين $\cos : x \mapsto \cos x$ و $\sin : x \mapsto \sin x$ دوريتين دورهما $T=2\pi$.

- لدينا : $\tan\left(x+k\pi\right)=\tan x$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+n\pi / n \in \mathbb{Z}\right\}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$.

إذن الدالة $\tan : x \mapsto \tan x$ دورية دورها $T=\pi$.

- و بصفة عامة لكل a من $\mathbb{R}^*$ ،

الدالتين $u : x \mapsto \cos ax$ و $v : x \mapsto \sin ax$ دوريتين دورهما $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$.

و الدالة $f : x \mapsto \tan ax$ دورية دورها $T=\dfrac{\pi}{|a|}$.

2)- خاصيات:

- **خاصية07:**

إذا كانت f دالة دورية دورها T فإن :

لكل x من D_f و لكل k من $\mathbb{Z}$. $\begin{cases} x+kT \in D_f \\ f\left(x+kT\right)=f\left(x\right) \end{cases}$

- **ملحوظة:**

الأعداد $T_k=kT$ حيث $k \in \mathbb{Z}^*$ تسمى أدوارا للدالة f ، و يكفي دراسة رتابتها و تمثيل منحناها على جزء D_E من D_f سعته T ، (دور الدالة f) .

- **مثال:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f\left(x\right)=\sin\left(3x\right)\cos x$.

بين أن الدالة f دورية دورها π ، ثم إستنتج أنه يمكن دراستها فقط على المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

IV- مطارف دالة عددية:

1)- أنشطة:

- **تمرين09:**

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f\left(x\right)=4x^2-12x+5$ و $g\left(x\right)=-x^2+x+6$.

بين أن الدالة f تقبل قيمة دنيا مطلقة يتم تحديدها و أن الدالة g تقبل قيمة قصوى مطلقة يتم تحديدها .

- **تمرين10:**

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 1-x \; ; x \le -1 \\ x+3 ; -1 \le x \le 2 \\ -2x+9 ; x \ge 2 \end{cases}$$

أنشىء $\left(C_f\right)$ في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، ثم إستنتج مطارف f و طبيعتها .

2)- ملخص:

- **تعريف:**

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و x_0 عنصر من D_f .

نقول إن f تقبل عند x_0 أدنى نسبي إذا وجد مجال مفتوح I بحيث $x_0 \in I$

و $f(x) \geq f(x_0)$ لكل x من I .

و نقول إن f تقبل عند x_0 أقصى نسبي إذا وجد مجال مفتوح I بحيث $x_0 \in I$

و $f(x) \leq f(x_0)$ لكل x من I .

و نقول إن f تقبل عند x_0 أدنى (على التوالي : أقصى) مطلق إذا كان :

$f(x) \geq f(x_0)$ لكل x من D_f .

(على التوالي : $f(x) \leq f(x_0)$ لكل x من D_f) .

V- رتابة دالة عددية:

1)- أنشطة:

- **تمرين11:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x^2 - 3|x|$.

1. حدد زوجية الدالة f ، ثم أحسب معدل تغيرها على $\mathbb{R}_+$.

2. أدرس رتابة f على $\mathbb{R}_+$ ، ثم إستنتج رتابتها على $\mathbb{R}_-$ و أنشىء جدول تغيراتها .

3. حدد مطارف الدالة f و طبيعتها .

- **تمرين12:**

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = x(4 - |x|)$.

1. حدد زوجية الدالة g ، ثم أدرس رتابتها على $\mathbb{R}$ و أنشىء جدول تغيراتها .

2. إستنتج مطارف الدالة العددية g و طبيعتها .

- **تمرين13:**

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = x^3 - 6x$.

1. بين أن لكل x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $x \neq y$ لدينا :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x^2 + xy + y^2 - 6$$.

2. أدرس رتابة الدالة h ثم إنشىء جدول تغيراتها و إستنتج مطارفها و طبيعة كل مطراف .

2)- ملخص:

- **الرتابة و معدل التغير:**

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و I مجال ضمن D_f .

تكون f تزايدية قطعا على I إذا و فقط إذا كان :

لكل x و y من I بحيث $x \neq y$: $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \succ 0$.

و تكون f تناقصية قطعا على I إذا و فقط إذا كان :

لكل x و y من I بحيث $x \neq y$: $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \prec 0$.

- **رتابة $ax^2 + bx + c$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$:**

لكل x من $\mathbb{R}$ نضع : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

لكل x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $x \neq y$ لدينا : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a(x + y) + b$.

هناك حالتين :

- إذا كان $a \succ 0$ فإن معدل تغير f موجب قطعا على المجال $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$ و سالب قطعا على المجال $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ ، و جدول تغيرات f يكون على الشكل التالي :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f		↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗	

و إذا كان $a \prec 0$ فإن معدل تغير f موجب قطعا على المجال $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ و سالب قطعا على المجال $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$ ، و جدول تغيرات f يكون على الشكل التالي :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	

- **رتابة** $\frac{ax+b}{cx+d}$ **حيث** $c\in\mathbb{R}^*$ **و** $(a,b)\neq(0,0)$ **:**

لكل x من $\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ نضع : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$.

لكل x و y من $\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ بحيث $x\neq y$ لدينا :

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y}=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)\left(y+\frac{d}{c}\right)} \quad .$$

إذن على كل مجال من المجالين $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$ و $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$ إشارة معدل تغير الدالة g هي إشارة المحددة $\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ ، و هناك ثلاث حالات ممكنة :

إذا كان $\delta=0$ فإن الدالة g تكون ثابتة على المجالين $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$ و $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$.

و إذ كان $\delta\prec 0$ فإن g تكون تناقصية قطعا على المجالين $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$ و $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$.

و إذ كان $\delta\succ 0$ ، فإن g تكون تزايدية قطعا على المجالين $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$ و $\left]-\frac{d}{c},+\infty\right[$.

VI- تركيب دالتين عدديتين:

1) - صورة مجال بدالة عددية:

- **تعريف:**

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f و I مجال ضمن D_f .

المجموعة $\{f(x)/x\in I\}$ تسمى صورة المجال I بالدالة f و يرمز له ب $f(I)$.

إذن : $f(I)=\{f(x)/x\in I\}$.

- **مثال:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب $f(x)=x^2$ ، لدينا :

$f([-3,2])=[0,9]$ و $f(]-4,-1[)=]1,16[$ و $f\left(\left[\sqrt{2},\sqrt{13}\right[\right)=[2,13[$.

- **تمرين14:**

نعتبر الدالتين العدديتين f و g بحيث : $f(x)=x^2-2x$ و $g(x)=\frac{x}{x+2}$.

1. حدد جبريا صور المجالات التالية : $I=[1,3]$ و $J=[-1,1]$ و $K=[0,2]$ بالدالة f .

2. حدد جبريا صور المجالات التالية : $I=[-4,-3[$ و $J=]0,4]$ و $K=\left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[$ بالدالة g .

3. أنشىء في معلم متعامد و ممنظم المنحنى (C_f) ، ثم حدد هندسيا صور المجالات $I=[1,3]$ و $J=[-1,1]$ و $K=[0,2]$ بالدالة f .

4. أنشىء (C_g) في معلم متعامد و ممنظم ، ثم حدد هندسيا صور المجالات $I=[-4,-3[$ و $J=]0,4]$ و $K=\left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[$ بالدالة g .

2) - مركب دالتين عدديتين:

- **تعريف:**

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على مجالين I و J على التوالي بحيث $f(I)\subseteq J$.

نسمي مركب f و g في هذا الترتيب الدالة h المعرفة على المجال I بما يلي :

$h(x)=g[f(x)]$ لكل x من I .

يرمز للدالة h بالرمز $g\circ f$ ، إذن :

$$g\circ f : \begin{vmatrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g\circ f\ (x) = g\left[f\ (x)\right] \end{vmatrix} .$$

- **مثال:**

نعتبر الدالتين العدديتين f و g بحيث : $f\ (x) = x^2 - 2x$ و $g\ (x) = x^2 + 2x$

1. أحسب $f\circ g\ (x)$ و $g\circ f\ (x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم قارن $f\circ g$ و $g\circ f$.

2. أحسب $f\circ f\ (x)$ و $g\circ g\ (x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

- **ملحوظة:**

بصفة عامة : $g\circ f \neq f\circ g$ ، هذا يعني أن تركيب الدوال عملية غير تبادلية .

- **تعميم:**

إذا كانت f و g دالتين عدديتين معرفتين على D_f و D_g على التوالي ، فإن :

$D_{g\circ f} = \left\{x \in D_f \ / f\ (x) \in D_g\right\}$ ، و لدينا :

$$g\circ f : \begin{vmatrix} D_{g\circ f} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g\circ f\ (x) = g\left[f\ (x)\right] \end{vmatrix}$$

- **مثال:**

نعتبر الدالتين العدديتين f و g بحيث : $f\ (x) = x^2 + x$ و $g\ (x) = \sqrt{x-6}$.

1. حدد $D_{g\circ f}$ و $D_{f\circ g}$.

ثم أحسب $g\circ f\ (x)$ لكل x من $D_{g\circ f}$ و $f\circ g\ (x)$ لكل x من $D_{f\circ g}$.

2. حدد $D_{g\circ g}$ و $D_{(g\circ f)\circ g}$ و $D_{(g\circ f)\circ f}$ و $D_{(g\circ f)\circ(f\circ g)}$.

3)- رتابة مركب دالتين:

- **خاصية08:**

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجالين I و J على التوالي بحيث : $f\ (I) \subseteq J$.

- إذا كانت ل f و g نفس الرتابة على المجالين I و J على التوالي فإن $g\circ f$ تكون تزايدية على المجال I .

- و إذا كانت ل f و g رتابة مختلفة على المجالين I و J على التوالي فإن $g\circ f$ تكون تناقصية على المجال I .

- **ملحوظة:**

إذا كانت g تزايدية على المجال J فإن ل f و $g\circ f$ نفس الرتابة على المجال I

و إذا كانت g تناقصية على المجال J فإن ل f و $g\circ f$ رتابة مختلفة على المجال I .

- **مثال:**

لننشىء جدول تغيرات الدالة العددية h المعرفة بما يلي : $h(x) = \dfrac{1}{x^2+2x}$

لدينا : $h = g\circ f$ حيث : $f\ (x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

و بما أن g تناقصية قطعا على المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ فإن ل f و $h = g\circ f$ رتابة مختلفة على أي مجال I ضمن $D_h = \mathbb{R} - \{-2,0\}$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة h إنطلاقا من جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
h		↗		↗	-1	↘		↘	

- **تمرين15:**

نعتبر الدالتين العدديتين f و h بحيث : $f\ (x) = \dfrac{1}{x}$ و $h(x) = \dfrac{4x-1}{x^2}$.

1. أوجد حدودية g من الدرجة الثانية تحقق : $h = g\circ f$.

2. أنشىء جدولي تغيرات الدالتين العدديتين f و g ، ثم إستنتج رتابة الدالة h على كل مجال من المجالات التالية : $]-\infty,0[$ و $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$ و $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ و أنشىء جدول تغيراتها .

- **تمرين16:**

1. أنشىء جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f\ (x) = -x^2 + x + 6$.

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $f\ (x) \geq \dfrac{1}{2}$ ، ثم إستنتج رتابة $f\circ f$ و أنشىء جدول تغيراتها .

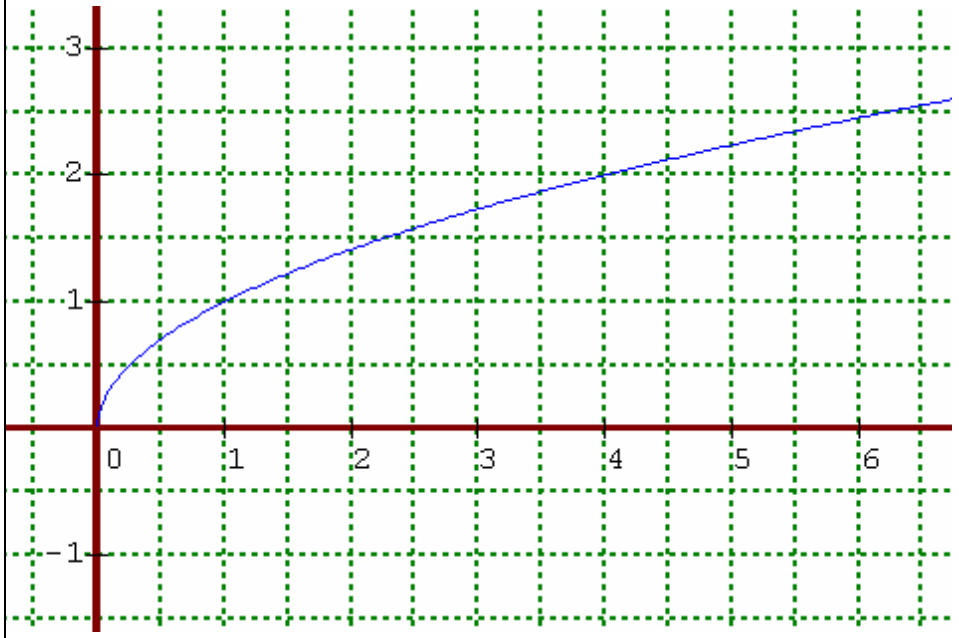
VII- التمثيل المبياني للدوال $x \mapsto \sqrt{x+a}$ و $x \mapsto ax^3$ و $x \mapsto E(x)$:

1)- تمثيل الدوال $x \mapsto \sqrt{x+a}$ حيث $a \in \mathbb{R}$:

لندرس رتابة الدالة $f : x \mapsto \sqrt{x}$ و ننشىء منحناها (C_0) .

لكل x و y من $[0,+\infty[$ بحيث $x \neq y$ لدينا : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \succ 0$

إذن f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ ، ومنحناها يكون على الشكل التالي :



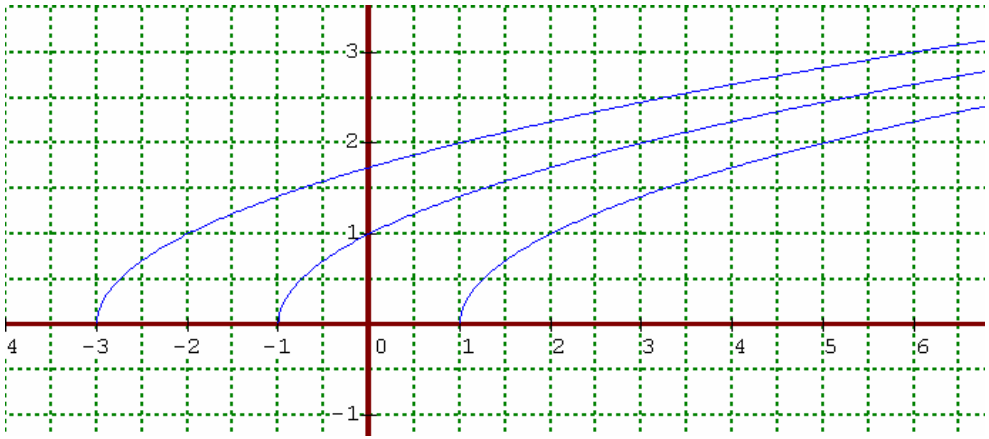
لكل a من $\mathbb{R}^*$ نعتبر الدالة العددية $f_a : x \mapsto \sqrt{x+a}$ و ليكن (C_a) منحناها في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

لدينا : من جهة $D_{f_a} = [-a,+\infty[$

ومن جهة أخرى : $t_a(C_0) = (C_a)$ حيث t_a هي الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u} = -a\vec{i}$.

إذن فالدالة f_a تزايدية قطعا على المجال $[-a,+\infty[$.

لننشىء في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنيات : (C_{-1}) و (C_1) و (C_3) :



2)- تمثيل الدوال $x \mapsto ax^3$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$:

لكل a من $\mathbb{R}$ نعتبر الدالة f_a المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_a(x) = ax^3$

و ليكن (C_a) منحناها في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

المنحنى (C_a) متماثل بالنسبة للنقطة O ، لأن f_a دالة فردية .

و لكل x و y من $\mathbb{R}$ بحيث $x \neq y$ لدينا :

$$\frac{f_a(x)-f_a(y)}{x-y} = a\left(x^2+xy+y^2\right)$$

إذن على $\mathbb{R}_+$ إشارة معدل تغير f_a هي إشارة العدد a ، و هناك حالتين :

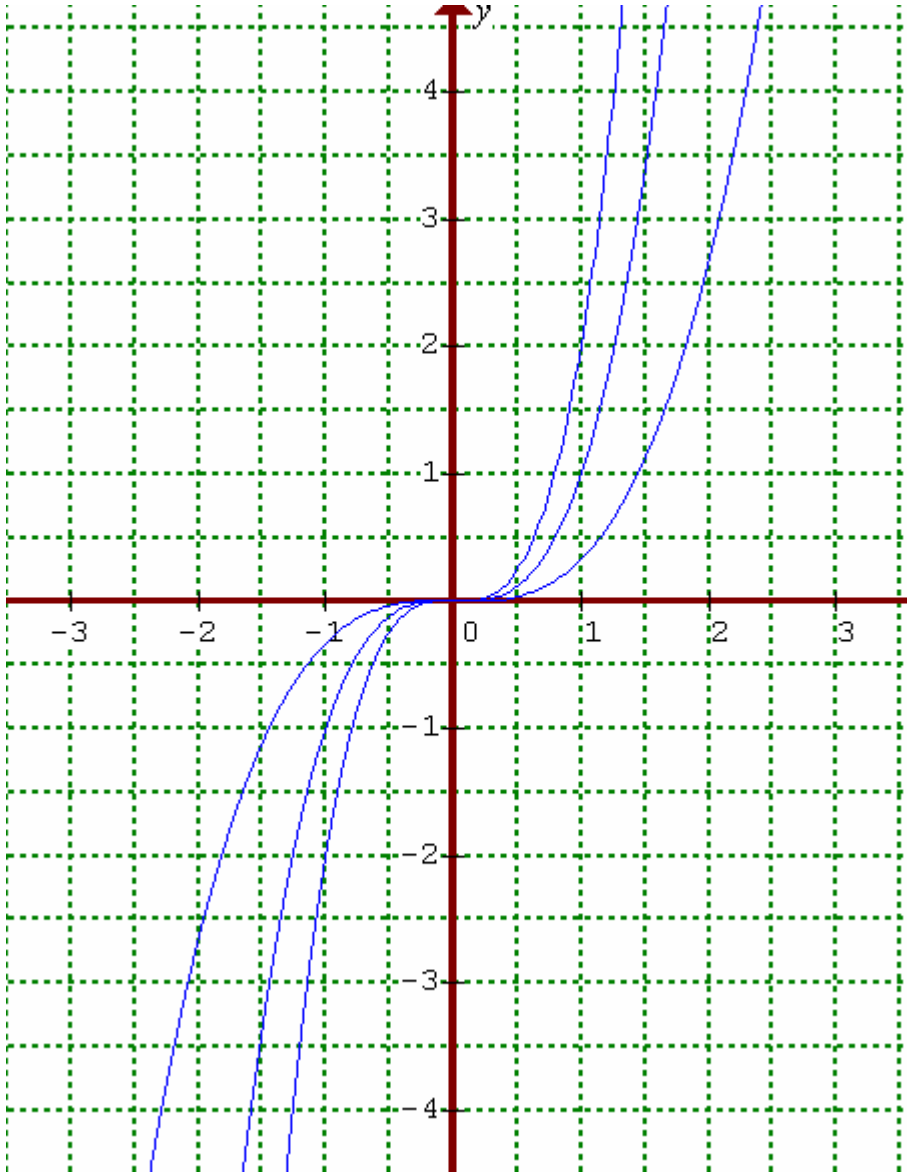
- في حالة $a \succ 0$:

الدالة f_a تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$ ، و بما أنها فردية فإنها أيضا تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_-$ و بالتالي فالدالة f_a تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

- في حالة $a \prec 0$:

الدالة f_a تناقصية قطعا على $\mathbb{R}_+$ ، و بما أنها فردية فإنها أيضا تناقصية قطعا على $\mathbb{R}_-$ و بالتالي فالدالة f_a تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

لننشىء في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنيات (C_1) و (C_2) و $(C_{1/3})$.



3)- تمثيل الدالة $f : x \mapsto E(x)$:

- **تعريف:**

الجزء الصحيح $E(x)$ لعدد حقيقي x هو أكبر عدد نسبي أصغر من أو يساوي x

هذا يعني أن : $E(x)=k$ يكافىء ($k \in \mathbb{Z}$ و $k \leq x \prec k+1$) .

- **أمثلة:**

لكل x من المجال $[2,3[$ لدينا : $E(x)=2$.

و بصفة عامة ، لكل x من المجال $[k,k+1[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ لدينا : $E(x)=k$.

- **خلاصة و نتائج:**

دالة الجزء الصحيح f معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{Z}$ كالتالي :

$$f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \\ x \mapsto k \ / \ k \leq x \prec k+1 \end{vmatrix}$$

إذن الدالة f تابثة على المجالات من الشكل $I_k=[k,k+1[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و هي دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

- **خاصيات:**

- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $x=E(x)+r$ حيث $0 \leq r < 1$.
- لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل p من $\mathbb{Z}$ لدينا : $E(x+p)=E(x)+p$.
- وبصفة عامة ، لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ لدينا :

$E(x+y)=E(x)+E(y)+\varepsilon$ حيث $\varepsilon=0$ أو $\varepsilon=1$

و $E(x-y)=E(x)-E(y)+\varepsilon$ حيث $\varepsilon=-1$ أو $\varepsilon=0$.

ثانوية الفتح – الخميسات
abouzakariya@yahoo.fr