المنطق

حسن وراق

التمرين1

نعتبر العبارة (P) التالية : $(P):\forall x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}: x^2-xy+y^2=0$

أ- اعط نفي العبارة (P) .

ب- بين أن العبارة (P) خاطئة .

التمرين2

باستعمال الاستدلال بالإستلزام المضاد للعكس بين أن :

أ- $a\neq -\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{a-b}{a+b}\neq -3$.

ب- $\forall x\in\mathbb{R}; x\neq 0\Rightarrow \sqrt{x+1}\neq 1+\frac{x}{2}$.

بين بالترجع كلا من العبارات التالية :

أ- $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2\left(n^2+1\right)^2}{4}$.

ب- $\forall a>0;\forall n\in\mathbb{N};(1+a)^n\geq 1+na$.

ج- لكل عدد صحيح طبيعي n العدد : $3^{2n}+2^{6n-5}$ يقبل القسمة على 11 .

د- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع a_n العدد المكون من n رقم كلها تساوي 7 $(a_1=7;a_2=77;a_3=777;......)$.

بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*;a_n=\frac{7}{9}\left(10^n-1\right)$.

ت- $\forall n\geq 24;\exists(p,q)\in\mathbb{N}^2: n=5p+7q$.

التمرين3

1- بين أن : p^2 زوجي $\Leftrightarrow$ p زوجي $\forall p\in\mathbb{Z}$.

2- بين أن كلا من العددين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ ليس عددا جذريا.

3- بين أن $\left(\forall(a,b)\in\mathbb{Q}^2;a+b\sqrt{2}=0\right)\Rightarrow(a=0\,et\,b=0)$.

التمرين4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=x^2-3x+2$.

1- اعط نفي العبارة $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right);\left(f(a)=f(b)\Rightarrow a=b\right)$.

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج أن العبارة السابقة خاطئة .

التمرين5

بين أن : $\forall x\in[-2;2]:\sqrt{4-x^2}-x\leq 2\sqrt{2}$.

بين أن $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)>0$

1- بين أن . $\left(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\right)\left(|a|<1\,et\,|b|<1\Rightarrow|a+b|<|1+ab|\right)$.

2- بين أن : $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{*2}\right)\left(2x+4y=1\Rightarrow\frac{1}{x^2+y^2}\leq 20\right)$.

3- بين أن $\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^{*2}\right)\left((xy-1)(x-y)\neq 0\Rightarrow x\left(y^2+y+1\right)\neq y\left(x^2+x+1\right)\right)$.

4- بين أن : $\begin{cases}a^2+b^2=1\\c^2+d^2=1\end{cases}\Rightarrow|ac+bd|\leq 1$ حيث $c;b;a$ و d أعداد حقيقية.

المنطق

حسن وراق

التمرين 6

$c;b;a$ أعداد حقيقية. نعتبر المعادلات التالية :

$$(E_1): x^2-2ax+bc=0$$
$$(E_2): x^2-2bx+ac=0$$
$$(E_3): x^2-2cx+ab=0$$

بين أنه على الأقل إحدى المعادلات السابقة تقبل حلا.

التمرين7

f دالة عددية معرفة على المجال $[0;1]$ بحيث : $(1)\forall x\in[0;1], 0\leq f(x)\leq 1$.

1- بين أن : $|f(1)-f(0)|\leq 1$.

2- نفترض أن f تحقق $(2)\forall(x;y)\in[0;1]^2 : |f(x)-f(y)|\geq|x-y|$.

بين أن : $|f(1)-f(0)|\geq 1$.

3- بين أنه إذا كانت f تحقق العلاقتين (1) و (2) فإن ($f(0)=1$ و $f(1)=0$) أو($f(0)=0$ و $f(1)=1$) .

4- بين أن : $f(0)=0\Rightarrow(\forall x\in[0;1]: f(x)=x)$.

5- -بين أن : $f(0)=1\Rightarrow(\forall x\in[0;1]: f(x)=1-x)$.

التمرين8

1- a و b من $\mathbb{R}^{*+}$.

أ- بين أن : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$.

ب- بين أن : $a+b=1\Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{1}{2} et\ ab\leq\frac{1}{4}$.

ج- بين أن : $a+b=1\Rightarrow\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$.

2- بين أن : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\left(\frac{|a+b|}{2}+\frac{|a-b|}{2}<c\Rightarrow|a|<c\ et\ |b|<c\right)$.

hassan205@gmail.com

المنطق

حسن وراق