تصحيح الإمتحان الوطني الموحد لمادة الرياضيات

شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

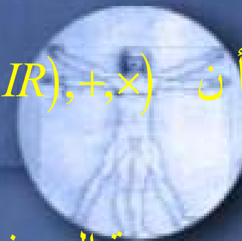
دورة يونيو 2009

من إعداد : الأستاذ : علي الشريف
نيابة إقليم الخميسات

cherifalix@yahoo.fr

التمرين الأول (3 ن)

$M_2(IR$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.



ذكر أن $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

كن F مجموعة المصفوفات $M(x,y)$ من $M_2(IR)$ بحيث : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$ مع $(x,y)\in IR^*\times IR$

– أ - بين أ ن F جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$.

ب – بين أ ن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية .

– لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x,0)$ من F بحيث $x\in IR^*$. بين أ ن G زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$.

– ليكن $E=IR^*\times IR$. نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي : $x,y)\perp(a,b)=\left(xa,xb+\frac{y}{a}\right)$

تبر التطبيق :

$$\varphi:(F,\times)\to(E,\times)$$
$$M(x,y)\to\varphi(M(x,y))=(x,y)$$

– أ حسب $(2,3)\perp(1,1)$ و $(1,1)\perp(2,3)$

ب – بين أ ن φ تشاكل تقابلي .

ج- آ ستنتج بنية $(E,\perp)$.

حل التمرين الأول

- أ – ليكن $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ عنصرين من F .

دينا : $M(x,y)\times M'(x',y')=\begin{pmatrix} xx' & xy'+\frac{y}{x'} \\ 0 & \frac{1}{xx'} \end{pmatrix}=M\left(xx',xy'+\frac{y}{x'}\right)$ و بما أ ن : $\left(xx',xy'+\frac{y}{x'}\right)\in IR^*\times IR$

إن $M(x,y)\times M'(x',y')\in F$ و بالتالي F جزء مستقر في $\left(M_2(IR),\times\right)$

- ب - لنبين أن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية .

• لدينا : $F\neq\phi$ لأن $I\in F$ • لدينا : $\forall M(x,y)\in F : M\times I=I\times M=M$ إدن I عنصر محايد ل F

لدينا F جزء مستقر في $\left(M_2(IR),\times\right)$ و "×" تجميعي في $\left(M_2(IR),\times\right)$ إدن "×" تجميعي فيF "مثال 7 ص 161 الواضح"

• لدينا لكل $M(x,y)\in F$ $\det\left(M(x,y)\right)=1$ إدن كل عنصرمن F يقبل مماثل . "مثال 7 –ب- ص164الواضح"

• لدينا من أجل : $M(x,y)=M(1,1)$ و $M'(x',y')=M(2,3)$:

$$M(1,1)\times M(2,3)=\begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad M(2,3)\times M(1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

نستنتج أن "×" غيرتبادلي في F . و بالتالي $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية .

cherifalix@yahoo.fr

- لتكن $G\{M(x,0)\in F / x\in IR^*\}$ لنبين أن G زمرة جزئية ل F .

لدينا : $I\in G \Rightarrow G\neq\phi$ • ليكن $M(x,0),M(y,0)\in G$ نلاحظ أن $M^{-1}(x,0)=M\left(\frac{1}{x},0\right)$

لدينا : $M(y,0)\times M^{-1}(x,0)=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{x} & 0 \\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{y}{x} & 0 \\ 0 & \frac{x}{y}\end{pmatrix}=M\left(\frac{y}{x},0\right)$ و بالتالي G زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$

<u>الخاصية المميزة للزمرة الجزئية ص175</u>
<u>الواضح أو ص 227 المفيد</u>

- أ – ليكن $E=IR^*\times IR$, نزود E بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$\forall(x,y)\in E,\forall(a,b)\in E:(x,y)\perp(a,b)=\left(xa,xb+\frac{y}{a}\right)$$

حساب $(1,1)\perp(2,3)$: $(1,1)\perp(2,3)=\left(1\times2,1\times3+\frac{1}{2}\right)=\left(2,\frac{7}{2}\right)$

حساب $(2,3)\perp(1,1)$: $(2,3)\perp(1,1)=\left(2\times1,2\times1+\frac{1}{2}\right)=\left(2,\frac{5}{2}\right)$

-ب- نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي :

$$\varphi:(F,\times)\to(E,\perp)$$
$$M(x,y)\to\varphi(M(x,y))=(x,y)$$

لنبين أن φ تشاكل تقابلي :

لدينا لكل $M(x,y)$ و $M'(x',y')$ من F :

$$M(x,y)\times M'(x',y'))=\varphi\left(M\left(xx',xy'+\frac{y'}{x}\right)\right)=\left(xx',xy'+\frac{y'}{x}\right)=(x,y)\perp(x',y')=\varphi(M(x,y))\perp\varphi(M'(x',y'$$

منه φ تشاكل .

لدينا : $\forall (x,y) \in E ; \exists ! M(x,y) \in F / \varphi(M(x,y)) = (x,y)$ - نستج بالتالي أن φ تشاكل تقابلي .

ج – بنية : $(E,\perp)$

- حسب ما سبق لدينا $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية .

- و لدينا : φ تشاكل تقابلي من $(F,\times)$ إلى $(E,\perp)$ $\Longleftarrow$ $(F,\times)$ و $(E,\perp)$ لهما نفس البنية الجبرية .

ملاحظة ص 177 الواضح

بالتالي $(E,\perp)$ زمرة غير تبادلية .

cherifalix@yahoo.fr

التمرين الثاني (4 ن)

– نعتبر في C المعادلة ذات المجهول z : $(E): z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$ حيث m عدد عقدي يخالف 1.

– أ – تحقق من أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=\left[(1+i)(m-1)\right]^2$

ب - حل في المجموعة C المعادلة (E):

ج – حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1.

- نضع : $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$, في حالة $m=e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2}\prec\theta\prec\pi$, أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

– المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي هي m و $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$

- حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية .

-أ- بين أن التحويل R الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z'=1-iz$ هو دوران ينبغي تحديد لحق
ركزه Ω و قياس لزاويته .

ب – بين أن العدد العقدي $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}$ تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان : $\mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1$

ج - آستنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة .

cherifalix@yahoo.fr

حل التمرين الثاني

-ا- لنتحقق ان : $\Delta = \left[(1+i)(1+m)\right]$

- لدينا : $\Delta = \left[(1-i)(1+m)\right]^2 + 4i\left(m^2+1\right)$ و بما أن : $(1-i)^2 = -2i$ و $(1+i)^2 = 2i$

فإن : $\Delta = -2i\left(1+2m+m^2\right) + 4m^2 i + 4i = 2i - 4mi + 2m^2 i = 2i(m-1)^2 = \left[(1+i)(m-1)\right]^2$

ب- لنحل في C المعادلة (E):

بآستعمال صيغة Δ نحصل على :

$$z_1 = \frac{(1-i)(1+m)-(1+i)(m-1)}{2} = 1-im \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{(1-i)(1+m)+(1+i)(m-1)}{2} = m-i$$

ج – تحديد قيمة m التي من أجلها $z_1 \times z_2 = 1$:

لدينا : $z_1 \times z_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{c}{a} = -i\left(m^2+1\right) = 1 \Leftrightarrow m^2 = -1+i$ خاصية 40ص43 الواضح أوخاصية 35 ص 53 المفيد

نضع : $m = x+iy$ فنحصل على النظمة :

$$\underbrace{x^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \;;\; y^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \;;\; 2xy = 1}_{(S)}$$

تطبيقات ص42 الواضح
أو أمثلة ص 52 المفيد

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{x^2 - y^2 = -1 \;;\; x^2 + y^2 = \sqrt{2} \;;\; 2xy = 1}_{(S)}$$

نستنتج أن : $m = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ أو $m = -\left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right]$

2- الشكل المثلثي ل z_1 و z_2 في حالة $m=e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2}\prec\theta\prec\pi$

ينا :

$$z_1=1-im=1-ie^{i\theta}=1+e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

لدينا :

$$\frac{\pi}{2}\prec\theta\prec\pi\Leftrightarrow 0\prec\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\prec\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\succ 0$$

$$\Downarrow$$

الشكل المثلثي ل z_1 هو:

$$z_1=2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

و لدينا:

$$z_2=m-i=e^{i\theta}+e^{-i\frac{\pi}{2}}=e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

و لدينا:

$$\frac{\pi}{2}\prec\theta\prec\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}\prec\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\prec\pi\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\prec 0$$

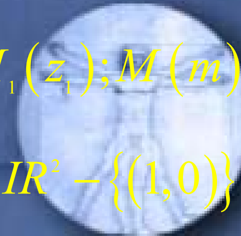
$$\Downarrow$$

الشكل المثلثي ل z_2 هو:

$$z_2=2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

cherifalix@yahoo.fr

II-1- تحديد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث تكون $M(m)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ مستقيمية



نا: $M_2(z_2);M_1(z_1);M(m)$ مستقيمية $\Longleftrightarrow \frac{z_1-m}{z_2-m}\in IR \Rightarrow i+m-im\in IR$

$\Downarrow$

ضع $m=x+iy/(x,y)\in IR^2-\{(1,0)\}$ نجد $y-x=0 \Longleftarrow i+x+iy-i(x+iy)\in IR$

و بالتالي مجموعة النقط هي المستقيم ذو المعادلة $1+y-x=0$ محروم من $M_0(1,0)$

$$R:\ P \rightarrow P$$

أ-لنبين أن : $M(Z)\rightarrow M'(z')/z'=1-iz$ دوران.

نا $|-i|=1$ و $-i\neq 1$ $\Longleftarrow$ R دوران مركزه $\Omega\left(\frac{1}{1-(-i)}\right)$ أي $\Omega\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)$ و قياس زاويته $rg(-i)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

<u>خلاصة ص 59 المفيد</u>

ب-لنبين أن $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in iIR \Leftrightarrow \mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1$ لدينا: $\frac{z_2-z_1}{z_2-m}=\frac{m-i-1+im}{m-i-m}=1+im-m-i$

$e(m)+\mathrm{Im}(m)=1\Leftrightarrow\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in iIR \Longleftarrow \overline{1+im-m-i}=-1-im-m-i\Leftrightarrow\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in iIR \Longleftarrow$

ج-مجموعةالنقط $M(m)$ بحيث تكون $M_2;M_1;M;\Omega$ متداورة .

نا: $z_1=1-im \Rightarrow R(M)=M_1$ $\Longleftarrow$ المثلث ΩMM_1 ثائم الزاوية في Ω $\Longleftarrow$ توجد دائرة وحيدة (ζ) مارة من

قط $M_1;M;\Omega$ قطرها $[MM_1]$ $\Longleftarrow$ النقط $M_2;M_1;M;\Omega$ متداورة $\Leftrightarrow$ $M_2\in(\zeta)$ $\Leftrightarrow$ المثلث M_2M_1M

م الزاوية في M_2 $\Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_2-m}\in iIR \Leftrightarrow \mathrm{Re}(m)+\mathrm{Im}(m)=1$ وبوضع $=x+iy/(x,y)\in IR^2-\{(1,0)\}$

د أن مجموعة النقط هي المستقيم ذو المعادلة $x+y-1=0$ محروم من النقطة $M_0(1,0)$

التمرين الثالث (3 ن)

ن n من IN* نضع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

- أ - تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من IN*

- ب- حدد قيم n التي يكون من أجلها : $a_n \equiv 0[3]$

- ليكن p عددا أوليا بحيث : $p \succ 3$

- أ- بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$

ب- بين أ ن p يقسم a_{p-2} .

ج - بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير
معدم n بحيث $a_n \wedge q = q$.

cherifalix@yahoo.fr

حل التمرين الثالث

1- أ- لنتحقق من أن لكل n من IN* a_n عدد زوجي .

خاصيات 3 ص93 المفيد

لدينا : $\underbrace{\forall n\in IN^*: 2^n+3^n+6^n-1\equiv0[2]}_{2} \Leftarrow \underbrace{2\equiv0[2];6\equiv0[2];3\equiv1[2]}_{1}$ و منه a_n عدد زوجي .

ب – قيم n التي من أجلها $a_n\equiv0[3]$:

لدينا : $\underbrace{\forall n\in IN^*;2^n\equiv(-1)^n[3]\Leftarrow 2\equiv-1[3]}_{2}$ و $\underbrace{6\equiv0[3];3\equiv0[3]}_{1}$

خاصيات 3 ص93 المفيد

من 1 و 2 نستنتج أن : $\underbrace{2^n+3^n+6^n-1\equiv(-1)^n-1\equiv0[3]}_{3}$ وبالتالي $a_n\equiv0[3] \Leftrightarrow n$ عدد زوجي .

2- أ – لنبين أن : $6^{p-1}\equiv1[p];\ 3^{p-1}\equiv1[p]\ ;\ 2^{p-1}\equiv1[p]$

لدينا : p عدد أولي أكبر قطعا من 3 $\Longleftarrow$ $p\wedge6=1\ ;\ p\wedge3=1\ ;\ p\wedge2=1$ مبرهنة 14 ص101 "المفيد"

$$\Downarrow$$

$6^{p-1}\equiv1[p];\ 3^{p-1}\equiv1[p]\ ;\ 2^{p-1}\equiv1[p]$ حسب مبرهنة فيرما (أنظر ملاحظة تابعة لمبرهنة15ص102 المفيد)

ب- لنبين أن : p/a_{p-2}

لدينا : $6a_{p-2}=3.2^{p-1}+2.3^{p-1}+6^{p-1}-6 \Leftarrow a_{p-2}=2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1$ و بآستعمال السؤال -2-أ- نستنتج أن :

$6a_{p-2}\equiv3.1+2.1+1-6\equiv0[p]$ و منه $p/6a_{p-2}$ و بالتالي : p/a_{p-2} لأن $p\wedge6=1$ خاصية 6 ص 101 المف

ج- لنبين أن لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n\wedge q=q$

q=2 $\Longleftarrow$ حسب -1-أ- $\forall n\in IN^*:2\wedge a_n=2 \Leftarrow \forall n\in IN^*:2/a_n$

$\forall n \in 2IN : a_n \wedge 3 = 3 \Leftarrow \forall n \in 2IN : 3 / a_n$ $\Longleftarrow$ **q=3**

$n = q - 2 \Leftarrow q / a_{q-2} \Leftarrow q \succ 3$ **حسب السؤال -2-ب-**

cherifalix@yahoo.fr

مسألة (10 ن)

عدد صحيح طبيعي . cherifalix@yahoo.fr

تبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$f_n(x)=x(1-\ell n(x))^n \; ; \; x \succ$ و $f_n(0)=0$ ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في م.م.م $(O;\vec{i},\vec{j})$.

جزء الأول :

أ- بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 . (يمكن وضع $x=t^n$)

ب- أدرس قابلية آشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0.

ج - حدد النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} ; \lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x}$.

أ- أدرس تغيرات الدالة f_1 .

ب- أدرس تغيرات الدالة f_2 .

أ- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2).

ب- أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) (نقبل أن $A(1,1)$ نقطة آنعطاف للمنحنى (C_2)) (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

جزء الثاني :

تبر الدالة العددية F للمتغيرالحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}.dt$

-أ- بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال$]-\infty,0[$ وأن : $(\forall x\prec 0)\ ;\ F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

- ب- آ ستنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty,0]$.

2 - أ- بين أن : $(\forall x\prec 0)\ ;\ \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\leq F(x)\leq\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$

- ب – تحقق أن الدالة $x\to x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ell n(x)}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال$]0,+\infty[$.

- ج – بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\frac{3}{4}$

- نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8}\leq\ell\leq\frac{3}{4}$

cherifalix@yahoo.fr

جزء الثالث :

ل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_1^e f_n(x).dx$

- أ- بين أن : $(\forall n \ge 1) : u_n \ge 0$

- ب - حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1,e]$

- ج – بين أن : $(\forall n \ge 1) : u_{n+1} \le u_n$

د - آستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة .

2 – أ- بين أن : $(\forall n \ge 1) : u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n$

- ب - آستنتج بالسنتمتر المربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1) و(C_2)

و المستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي $x = 1$ و $x = e$.

– أ- بين أن : $\frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1}$: $(\forall n \ge 2)$ (يمكنك آستعمال الأسئلة -1-أ , -1-ج- , 2-أ-.)

- ب- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Cherifalix@yahoo.fr

- a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1.

تبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $v_1 = a$ و $n \geq 1$; $v_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} v_n$.

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع : $d_n = |v_n - u_n|$

- بين أن : $(\forall n \geq 1) : d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} . d_1$

ب – بين أن : $\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty$

ج – آستنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متباعدة .

Cherifalix@yahoo.fr

حل المسألة

أ- اتصال f_n على اليمين في 0 .

نضع : $t^n = x$ فنحصل على : $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} t^n\left(1-nt\ell n(t)\right)^n = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(t-nt\ell n(t)\right)^n = 0 = f_n(0)$

و منه f_n متصلة يمين في 0 .

ب- اشتقاق الدالة f_n يمين 0.

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f_n(x)-f_n(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\ell n(x)\right)^n = +\infty$ إذن f_n غير قابلة للإشتقاق يمين 0 .

ج- حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_1(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_2(x)}{x}$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\ell n(x)\right) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_1(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\ell n(x)\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\ell n(x)\right)^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\ell n(x)\right)^2 = +\infty$

– أ- تغيرات f_1

لدينا f_1 قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ بحيث : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ; f_1'(x) = 1-\ell n(x)-1 = -\ell n(x)$

نستنتج إذن جدول تغيرات f_1

x	0		1		$+\infty$
f_1'	||	+	0	—	
f_1	0	↗	1	↘	$-\infty$

cherifalix@yahoo.fr

ب- لدينا f_2 قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ بحيث :

$$\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right)\ ; f_2'(x) = \left(1-\ell n(x)\right)^2 - 2x \times \frac{1}{x}\left(1-\ell n(x)\right) = \left(\ell n(x)-1\right)\left(\ell n(x)+1\right)$$

ستنتج إذن جدول تغيرات f_2

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
f_2'	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3-أ- الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2).

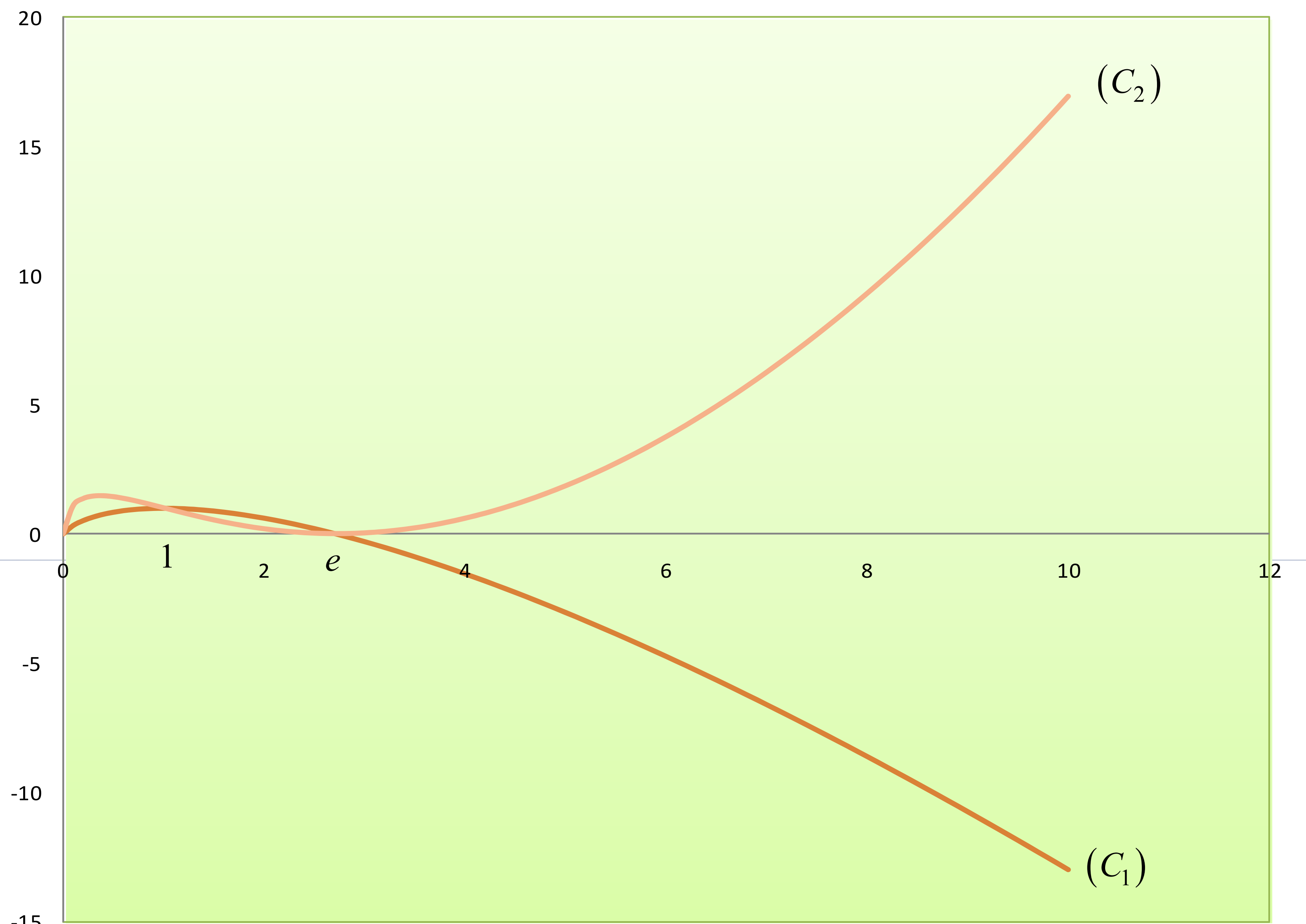
لدينا : $$\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right) : f_1(x) - f_2(x) = x\ell n(x)\left(1-\ell n(x)\right)$$

رضع النسبي

x	0		1		e		$+\infty$
$f_1(x)-f_2(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		C_2 فوق C_1		C_1 فوق C_2		C_2 فوق C_1	

cherifalix@yahoo.fr

ب – التمثيل البياني لمنحنيين (C_1) و (C_2)



الجزء الثاني :

- نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}.dt$

- أ- لنبين أن : الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ وأن : $(\forall x\prec 0)\,;\,F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

لدينا : $t\to\frac{f_1(t)}{1+t^2}$ متصلة على $[0,+\infty[$ و الدالة $x\to e^x$ قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$ و $e(]-\infty,0[)\subset[0,+\infty[$

إذن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ بحيث :

$$(\forall x\in]-\infty,0[):F'(x)=-e^x\frac{f_1(e^x)}{1+e^{2x}}=-e^x\frac{e^x\left(1-\ell n(e^x)\right)}{1+e^{2x}}=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

- ب- تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty,0]$:

لدينا : $(\forall x\in]-\infty,0[):(x-1)\prec 0$ و $(\forall x\in]-\infty,0[):\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\succ 0$ $\Leftarrow$ $(\forall x\in]-\infty,0[):F'(x)\prec 0$

إذن الدالة F تناقصية على المجال $]-\infty,0]$.

2- أ- لنبين أن : $(\forall x \prec 0) ; \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt$

ينا ❶ $(\forall x \prec 0): 0 \prec e^x \prec 1$ ❷ $(\forall t\in[e^x,1]): 0 \prec 1+e^{2x} \le 1+t^2 \le 2$ ❸ $(\forall t\in[e^x,1]): f_1(t)\ge 0$

ن ❶; ❷; ❸ نستنتج أ ن : $(\forall t\in[e^x,1]): \frac{1}{2}f_1(t) \le \frac{1}{1+t^2}f_1(t) \le \frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)$

منه : $(\forall t\in[e^x,1]): \int_{e^x}^{1}\frac{1}{2}f_1(t)\,dt \le \int_{e^x}^{1}\frac{1}{1+t^2}f_1(t)\,dt \le \int_{e^x}^{1}\frac{1}{1+e^{2x}}f_1(t)\,dt$

بالتالي : $(\forall x \prec 0) ; \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt$

- ب- لنتحقق أن الدالة $x \to x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ell n(x)}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0,+\infty[$.

لدينا $(\forall x \in]-\infty,0[)$: $\left(x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ell n(x)}{2}\right)\right)' = f_1(x)$:

- لنبين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt=\frac{3}{4}$

ا حسب س -2-ب : $\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt=\left[t^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ell n(t)}{2}\right)\right]_{e^x}^{1}=\frac{3}{4}-e^{2x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{4}-e^{2x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{4}$

نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. لنبين أن : $\frac{3}{8}\le\ell\le\frac{3}{4}$

ن خلال التأطير $\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt\le F(x)\le\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt\ ;\ (\forall x\prec 0)$ و س-2- ب نستنتج أن : $\frac{3}{8}\le\ell\le\frac{3}{4}$

<u>زء الثالث :</u>

عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n=\int_1^e f_n(x).dx$

أ- لنبين أن : $(\forall n\ge1)\ :u_n\ge0$

ا : $(\forall n\in IN^*):u_n\ge0\Leftarrow(\forall n\in IN^*):\int_e^1 f_n(x)dx\ge0\Leftarrow(\forall n\in IN^*)(\forall x\in[1,e]):f_n(x)\ge0$

ب - لنحدد إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[1,e]$

نا : $f_{n+1}(x)-f_n(x)=-x\ell n(x)(1-\ell n(x))$ و $(\forall x\in[1,e]):\underbrace{0\le\ell n(x);0\le1-\ell n(x);0\le(1-\ell n(x))^n}_{*}$

ه : $(\forall x\in[1,e]):f_{n+1}(x)-f_n(x)\le0$

- لدينا حسب السؤال السابق : $(\forall n\geq 1):u_{n+1}\leq u_n \Leftarrow \int_1^e f_{n+1}(x)\,dx\leq \int_1^e f_n(x)\,dx \Leftarrow (\forall x\in[1,e]) : f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$

– تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

دينا u_n مصغورة ب 0 و تناقصية حسب – ج- إذن فهي متقاربة .

– أ- لنبين أن : $(\forall n\geq 1) : u_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n$

لدينا : $u_{n+1}=\int_1^e f_{n+1}(x)\,dx=\int_1^e x(1-\ell n(x))^{n+1}\,dx$ و بآستعمال المكاملة بالأجزاء نجد :

$$\underbrace{v'(x)=-(n+1)\frac{(1-\ell n(x))^n}{x}\Leftarrow v(x)=(1-\ell n(x))^{n+1}}_{2} \quad و \quad \underbrace{u(x)=\frac{x^2}{2}\Leftarrow u'(x)=x}_{1}$$

نه : $u_{n+1}=\int_1^e x(1-\ell n(x))^{n+1}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}(1-\ell n(x))^{n+1}\right]_1^e+\frac{n+1}{2}\int_1^e x(1-\ell n(x))^n dx=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}.u_n$

- مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1)و(C_2) و المستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي $x=1$ و $x=e$.

نا : $S=\int_1^e |f_2(x)-f_1(x)|\,dx\times 4cm^2=\frac{1}{2}\times 4cm^2=2cm^2$ حسب 2-أ-

– أ- لنبين أن : $(\forall n\geq 2) : \frac{1}{n+1}\leq u_n\leq \frac{1}{n-1}$

cherifalix@yahoo.fr

$$\underbrace{(\forall n\ge 2): u_n - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)u_n-1}{(n+1)} = \frac{2u_{n+1}}{(n+1)} \Rightarrow \frac{1}{n+1}\le u_n}_{1}$$ بآستعمال 2-أ- وإشارة u_n

$$\underbrace{(\forall n\ge 2): u_{n+1}\le u_n \Rightarrow 2u_{n+1}+1\le 2u_n+1 \Rightarrow (n+1)u_n\le 2u_n+1 \Rightarrow u_n\le\frac{1}{n-1}}_{2}$$ بآستعمال -1ج- و-2-أ-

1 و 2 نستنتج أن : $(\forall n\ge 2): \frac{1}{n+1}\le u_n\le\frac{1}{n-1}$

aعدد حقيقي مخالف للعدد u_1.نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي : $v_1=a$ و $n\ge1$; $v_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}v_n$.

كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم نضع : $d_n=|v_n-u_n|$

لنبين أن : $(\forall n\ge1): d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}.d_1$

رجع لدينا : من أجل $n=1$: $d_1=\frac{1!}{2^{1-1}}d_1=d_1$ إذن العبارة صحيحة .

فترض أن العبارة صحيحة من أجل : $n\ge1$ أي : $d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1$

ينا : $d_{n+1}=|v_{n+1}-u_{n+1}|=\frac{(n+1)}{2}|v_n-u_n|=\frac{(n+1)}{2}d_n=\frac{(n+1)!}{2^n}d_1$

التالي : $(\forall n\ge1): d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1$

cherifeliz@yahoo.fr

ب – لبين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$

نا : $\underbrace{(\forall n\geq 1): d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1 \Rightarrow \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n+1}{2}}_{1}$ و $\underbrace{(\forall n\geq 3): \frac{n+1}{2}\geq 2}_{2}$

ن 1 و 2 نستنتج أن : $(\forall n\geq 3): \frac{d_{n+1}}{d_n}\geq 2 \Rightarrow d_n \geq 2^{n-3}.d_3$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$

ج – لنستنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متباعدة .

GSM : 0664865556

دا كانت $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و لدينا $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة فإن (d_n) ستكون متقاربة و هدا تناقض و بالتالي $(v_n)_{n\geq 1}$ متباعدة .

cherifalix@yahoo.fr

GSM : 0664865556