■ تمرين01:

$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = (x+2)e^{-x}$

1)- لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x}$

إذن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ومنه فإن (C_f) **يقبل** (Ox) **مقاربا أفقيا بجوار** $+\infty$.

- بالنسبة ل $-\infty$ **لدينا :**

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

و بما أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : \dfrac{f(x)}{x} = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)e^{-x}$

فإن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

إذن (C_f) **يقبل بجوار** $-\infty$ **فرعا شلجميا إتجاهه** (Oy) .

2)- الدالة f **قابلة للإشتقاق على** $\mathbb{R}$ **لأنها جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على** $\mathbb{R}$ **، ولدينا :**

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x+2)' e^{-x} + (x+2)(e^{-x})'$

إذن : $f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x}$

أي أن : $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -(x+1)e^{-x}$

وبالتالي : $\forall x \in \mathbb{R} : sg[f'(x)] = -sg[x+1]$

إذن الدالة f **تزايدية قطعا على المجال** $]-\infty,-1]$

و تناقصية قطعا على المجال $[-1,+\infty[$ **و** (C_f) **يقبل عند النقطة** $A(-1,e)$ **مماسا أفقيا .**

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	e	↘	0

3)- لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = xe^{-x}$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} : sg[f''(x)] = sg(x)$

ومنه فإن (C_f) **مقعر على المجال** $]-\infty,0]$ **و محدب على المجال** $[0,+\infty[$ **ويقبل نقطة إنعطاف واحدة هي :** $\Omega(0,2)$.

5)- لدينا : $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \mathrm{A}(\lambda) = \int_0^\lambda (x+2)e^{-x}dx$

نضع $\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ **إذن :** $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

و بالتالي : $\mathrm{A}(\lambda) = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x}dx$

أي أن : $\mathrm{A}(\lambda) = 2 - (\lambda+2)e^{-\lambda} + \left[-e^{-x}\right]_0^\lambda$

ومنه : $\mathrm{A}(\lambda) = 2 - (\lambda+2)e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda}$

إذن : $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \mathrm{A}(\lambda) = 3(1 - e^{-\lambda}) - \lambda e^{-\lambda}$

- إستنتاج:

لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{\lambda \to +\infty} -\lambda e^{-\lambda} = 0 \\ \lim\limits_{\lambda \to +\infty} 3(1 - e^{-\lambda}) = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathrm{A}(\lambda) = 3$

إذن مساحة الحيز المحصور بين (C_f) **و محوري المعلم على** $\mathbb{R}_+$ **هي :** $\mathrm{A} = 3cm^2$.

■ تمرين02:

1)- لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$

إذن : $I = [x - Arc\tan x]_{-1}^0 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$

- بالنسبة للتكامل : $J = \int_{-1}^0 \ln(1+x^2)dx$ **، نضع :**

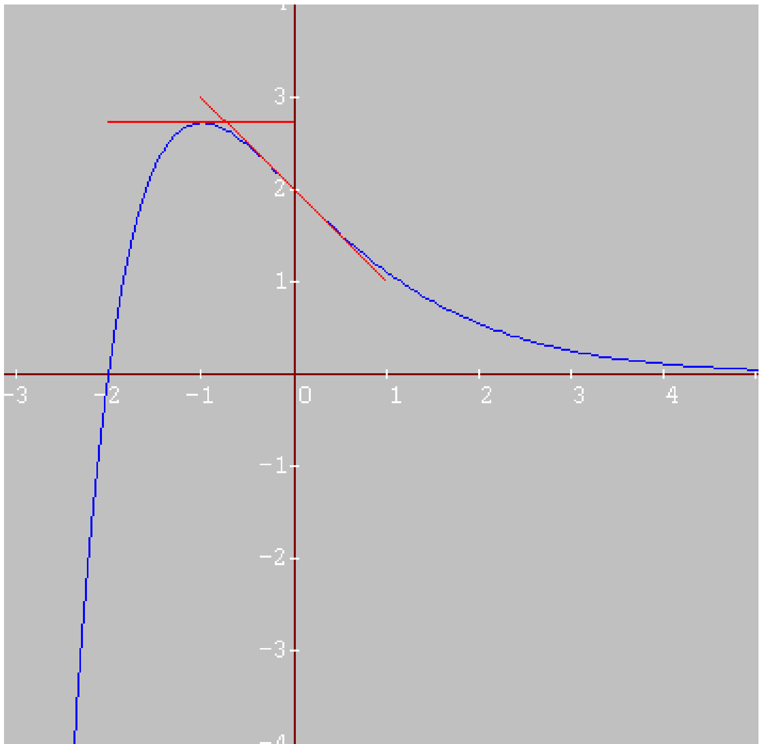
$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ **إذن :** $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$

و لدينا : $J = \left[x\ln(1+x^2)\right]_{-1}^0 - 2\int_{-1}^0 \dfrac{x^2}{1+x^2}dx$

أي أن : $J = \ln 2 - 2I = \ln 2 - 2\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)$

و بالتالي فإن : $J = \dfrac{\pi - 4 + 2\ln 2}{2}$.

4)- إنشاء المماس (T) و المنحنى (C_f) : (التمرين01:)



2)- بالنسبة للتكامل : $A=\int_{-7}^{0}\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-x}}dx$

نضع : $u=\sqrt[3]{1-x}$ **إذن :** $\begin{cases}u^3=1-x\\ 3u^2du=-dx\end{cases}$

و لدينا : $A=\int_{2}^{1}\frac{-3u^2}{1+u}du$

و بما أن : $\frac{-3u^2}{1+u}=-3\left(u-1+\frac{1}{u+1}\right)$

فإن : $A=-3\left[-u+\frac{u^2}{2}+\ln(1+u)\right]_2^1$

أي أن : $A=3\left(\frac{1}{2}+\ln 3-\ln 2\right)$

- بالنسبة للتكامل : $B=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{1}{1-\cos x}dx$ ،

نضع : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ **إذن :** $\begin{cases}dx=\frac{2}{1+t^2}dt\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

و منه فإن : $B=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1+t^2}{2t^2}\times\frac{2}{1+t^2}dt$

أي أن : $B=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{t^2}dt=\left[\frac{-1}{t}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$

و بالتالي : $B=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

- بالنسبة للتكامل : $C=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\ln x}{1+x^2}dx$ ،

نضع : $y=\frac{1}{x}$ **إذن :** $dx=\frac{-1}{y^2}dy$

ولدينا : $C=\int_{2}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{1+\left(\frac{1}{y}\right)^2}\times\frac{-1}{y^2}dy$

أي أن : $C=\int_{2}^{\frac{1}{2}}\frac{\ln y}{1+y^2}dy$

هذا يعني أن : $C=-C$ ، **إذن :** $C=0$.

- بين بصفة عامة أن :

$$\forall a\in\left]0,+\infty\right[: \int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0$$

ضع : $y=\frac{1}{x}$.

3)- بتطبيق علاقة شال نحصل على :

$$K=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x}dx+\int_{0}^{3}\frac{1}{1+x}dx$$

أي أن : $K=\left[-\ln(1-x)\right]_{-1}^{0}+\left[\ln(1+x)\right]_{0}^{3}$

إذن : $K=\ln 2+\ln 4=3\ln 2$.

- لدينا :

$$\forall x\in\left]0,+\infty\right[:\frac{1-\ln\sqrt[3]{x}}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\times\ln x\right)$$

إذن : $L=\int_{1}^{e}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{3}\int_{1}^{e}(\ln x)'\ln x\,dx$

أي أن : $L=\left[(\ln x)-\frac{1}{6}(\ln x)^2\right]_{1}^{e}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

- بالنسبة للتكامل : $M=\int_{0}^{2\pi}\left(\pi-|2x-\pi|\right)\sin x\,dx$

نطبق علاقة شال ، من جهة :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\pi-|2x-\pi|\right)\sin x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

$$=2\left[-x\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$$=0+2\left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2$$

و من جهة أخرى :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\left(\pi-|2x-\pi|\right)\sin x\,dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}(\pi-x)\sin x\,dx$$

$$=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin x\,dx-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}x\sin x\,dx$$

$$=2\pi\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}-2\left[-x\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$=-2\pi+4\pi+2=2\pi+2$$

و بالتالي فإن :

$$M=\int_{0}^{2\pi}\left(\pi-|2x-\pi|\right)\sin x\,dx=2\pi+4 \text{ .}$$

■ تمرين03:

1)- لدينا : $h(2)=\int_{1}^{2}\frac{x-1}{-x^2+2x+1}dx$ **، لأن الدالة :**

$x\mapsto x^2-2x$ **سالبة على المجال** $[1,2]$.

إذن : $h(2)=-\frac{1}{2}\int_{1}^{2}\frac{(x^2-2x-1)'}{x^2-2x-1}dx$

أي أن : $h(2)=-\frac{1}{2}\left[\ln|x^2-2x-1|\right]_{1}^{2}$

وبالتالي : $h(2)=-\frac{1}{2}(0-\ln 2)=\frac{\ln 2}{2}$.

2)- لكل α **من المجال** $\left]2,+\infty\right[$ **لدينا :**

$$h(\alpha)=h(2)+\int_{2}^{\alpha}\frac{x-1}{x^2-2x+1}dx$$

(بتطبيق علاقة شال و بكون الدالة: $x\mapsto x^2-2x$ **موجبة على المجال** $[2,\alpha]$ **)**

إذن : $h(\alpha)=\frac{\ln 2}{2}+\int_{2}^{\alpha}\frac{1}{x-1}dx$

أي أن : $h(\alpha)=\frac{\ln 2}{2}+\left[\ln(x-1)\right]_{2}^{\alpha}$

$$h(\alpha)=\frac{\ln 2}{2}+\ln(\alpha-1)=\ln\left[\sqrt{2}(\alpha-1)\right]$$

2)- لدينا : $V_e=\pi\times\int_{2}^{4}\left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right)^2dx$

هذا يعني أن : $V_e=\pi\times\int_{2}^{4}\frac{\ln x}{x^2}dx$

نضع : $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=\frac{1}{x^2}\end{cases}$ **إذن :** $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=\frac{-1}{x}\end{cases}$

و بالتالي : $V_e=\pi\times\left(\left[\frac{-\ln x}{x}\right]_{2}^{4}+\int_{2}^{4}\frac{1}{x^2}dx\right)$

أي أن : $V_e=-\pi\times\left[\frac{1+\ln x}{x}\right]_{2}^{4}=\frac{\pi}{4}$.

■ تمرين04:

1)- المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E_0) **هي :** $(1):r^2+1=0$ **و حليها هما** $r_1=i$ **و** $r_2=-i$

إذن حلول المعادلة (E_0) **هي :**

$$y:x\mapsto A\cos x+B\sin x\ /\ (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

3)- مجموعة حلول المعادلة (E) **هي :**

$$z:x\mapsto z(x)=A\cos x+B\sin x+xe^{-x}$$

حيث $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

4)- الحل g **يحقق الشرطين البدئيين :**

$g(0)=1$ **يعني أن** $A=1$

و $g'(0)=0$ **يعني أن :** $B=-1$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}:g(x)=\cos x-\sin x+xe^{-x}$

$$g(x)=xe^{-x}+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$