يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول : (ثلاث نقط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :
$\Omega(2;-2;1)$, $C(0;0;1)$, $B(-1;0;0)$, $A(1;1;0)$

1) أ ـ حدد إحداثيات المتجهة : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

ب ـ تحقق أن : $x-2y-z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

ج ـ إعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC).

2) أ ـ حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها Ω و المماسة للمستوى (ABC).

ب ـ حدد إحداثيات H نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (ABC) .

التمرين الثاني : (ثلاث نقط ونصف)

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3 \end{cases}$$

1) بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ 0\le u_n\le 1$

2) أدرس رتابة (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة . (لاحظ أن : $8u_n=\left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^3$)

3) نضع : $\forall n\in\mathbb{N}\quad ;\quad v_n=\sqrt[3]{u_n}-1$

أ ـ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب ـ أكتب v_n ثم u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع : $S_n=\sqrt[3]{u_0}+\sqrt[3]{u_1}+\sqrt[3]{u_2}+\cdots+\sqrt[3]{u_{n-1}}$ أحسب S_n بدلالة n .

التمرين الثالث : (أربع نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ :\ z^2-(1+3i\sqrt{3})z-8=0$

1) أ ـ أحسب : $(3+i\sqrt{3})^2$

ب ـ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

ج ـ أكتب حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي .

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقطتين A و B لحقاهما على التوالي $z_A = 2+2i\sqrt{3}$ و $z_B = -1+i\sqrt{3}$

أ ـ تحقق أن : $\dfrac{z_B - z_A}{z_B} = \sqrt{3}i$ و استنتج طبيعة المثلث OAB .

ب ـ حدد العدد العقدي z_C لحق النقطة C بحيث يكون الرباعي $OBAC$ مستطيلا .

مسألـة : (تسع نقط و نصف)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي :
$$\begin{cases} f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) \quad ; \quad x\langle 0 \\ f(x) = \sqrt{x\ln(x+1)} \quad ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

و ليكن (C) ا لمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

1) تحقق أن f متصلة في $x_0 = 0$

2) أ ـ تحقق أن :
$$\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{e^{2x} - e^x} \cdot e^x \cdot \dfrac{e^x - 1}{x} \quad ; \quad x\langle 0 \\ \dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{\ln(x+1)}{x}} \quad ; \quad x\rangle 0 \end{cases}$$

ب ـ استنتج أن f قابلة للإشتقاق في $x_0 = 0$ وأن $f'(0) = 1$.

3) أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ثم حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

4) أ ـ بين أن :
$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1} \quad ; \quad x\langle 0 \\ f'(x) = \dfrac{\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}}{2\sqrt{x\ln(x+1)}} \quad ; \quad x\rangle 0 \end{cases}$$

ب ـ استنتج أن f تزايدية قطعا على كل من المجالين $[-\ln 2;0]$ و $[0;+\infty[$ و تناقصية قطعا على $]-\infty;-\ln 2]$.

5) أنشئ المنحنى (C) . (نقبل أن (C) يقبل نقطة انعطاف أفصولها أصغر من -1)

6) أ ـ أحسب التكامل : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$

ب ـ استنتج حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل دورة كاملة على المجال $[0;1]$.
(استعمل المكاملة بالأجزاء)

7) ليكن h قصور الدالة f على المجال $I = [-\ln 2;0]$

أ ـ بين أن h تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده .

ب ـ حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J . .