

امتحان تجريبي

العرايش 2006/2005

- يتكون هذا الموضوع من أسئلة مستقلة فيما بينها و ثلاث تمارين و مسألة.
- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة.

أسئلة : (ثلاث نقط)

(1) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} - 1$ في الحالتين التاليتين :

(0.5ن) $x > 1$.

(0.5ن) $0 < x < 1$.

(2) أ- انشر باستعمال حدانية نيوتن العدد $(a + b)^4$. (0.5ن)

ب- استنتج إخطاط $\cos^4 \theta$. (0.5ن)

ج- احسب التكامل التالي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta) d\theta$. (0.5ن)

(3) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير، احسب : $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$. (ضع $t = e^x$) (0.5ن)

التمرين الأول : (3نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم، نعتبر النقط التالية : $A(1,0,1)$ و $B(0,1,2)$ و $C(-1,1,2)$.

(1) حدد معادلة للفلكة (S) التي مركزها A والمارة من B . (0.5ن)

(2) حدد معادلة للمستوى (P) المماس للفلكة (S) في B . (0.5ن)

(3) حدد H المسقط العمودي للنقطة C على (P) . (1.5ن)

(4) بين أن $\vec{CH} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$. (0.5ن)

التمرين الثاني : (نقطتان)

(1) اكتب على الشكل الجبري العدد العقدي $(1 + i)^2$. (0.25ن)

(2) حل في C المعادلة : $z^2 - 2(3 + 2i)z + 5 + 10i = 0$. (0.75ن)

(3) نعتبر في المستوى العقدي النقط $A(4 + 3i)$ و $B(2 + i)$ و $C(3)$.

أ - بين أن ABC قائم الزاوية في B . (0.5ن)

ب- بين أن $BA = 2BC$. (0.5ن)

التمرين الثالث : (نقطتان)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس. نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس:

• إذا كانت بيضاء ، نسحب تانيا كرتين من بين الكرات المتبقية .

• إذا كانت سوداء ، نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من بين الكرات المتبقية .

(1) أ- احسب $Card(\Omega)$. (0.5ن)

ب- احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون. (0.5ن)

(2) إذا علمت أننا حصلنا على كرتين سوداويتين بالضبط ، ما هو الإحتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء؟ (1ن)

مسألة : (10ن)

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - e^{x+1} & , x \leq -1 \\ f(x) = x + \ln(x^3 - 3x + 3) & , x \geq 1 \end{cases}$$

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

I

- نضع $g(x) = x^3 - 3x + 3$ لكل x من $[1, +\infty[$.
- (1) أ- ادرس تغيرات g على $[1, +\infty[$. (0.25ن)
ب- استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $[1, +\infty[$. (0.25ن)
 - (2) استنتج ما يلي :
أ- $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. (0.5)
ب- $f(x) \geq x$ لكل x من $[1, +\infty[$. (0.5)
ج- المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1, +\infty[$ يتم تحديده. (0.5ن)

II

- (1) أ- بين أن $f'_g(-1) = 0$ ثم فسر النتيجة مبيانيا. (0.5ن)
ب- بين أن $f'_d(1) = 1$ ثم فسر النتيجة مبيانيا. (0.5ن)
- (2) بين أن f تزايدية قطعا على كل من المجالين $[1, +\infty[$ و $] -\infty, -1]$. (1ن)
- (3) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مغارب مائل للمنحنى بجوار $-\infty$. (0.5ن)
ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) مع (Δ) . (0.25ن)
- (4) أ- بين أن $f(x) = x + 3 \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$ لكل x من $[1, +\infty[$. (0.25ن)
ب- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$. (1ن)
- (5) أنشئ المنحنى (C). (1ن)
- (6) ليكن h قصور الدالة f على المجال $[1, +\infty[$.
أ- بين أن h تقابل من المجال $[1, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده. (0.5ن)
ب- أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة h^{-1} . (0.5ن)

III

- (1) لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = h^{-1}(U_n)$ لكل n من IN .
يمكنك فيما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f على $[1, +\infty[$.
- (2) بين بالترجع أن $U_n \geq 1$ لكل n من IN . (0.5ن)
- (3) بين أن (U_n) تناقصية. (1ن) (يمكنك استعمال السؤال I - 2 - ب)
- (4) استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب نهايتها. (0.5ن)