ثانوية الفتح نيابة الخميسات	تصحيح الإمتحان التجريبي لدورة أبريل 2006	2 ع ت 01 + 2 ع ت 02 Prof : BENELKHATIR

■ **مسألة:**

■ **الجزء الأول:**

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln|x|$$

1)- لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ و } |x| \succ 0$$
$$\Leftrightarrow x \neq 0$$

إذن : $D_f = \mathbb{R}^*$.

- نهايتي f عند $+\infty$ و $-\infty$:

لدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \ln|x| = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

و $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}(1 + x\ln x)$

وبما أن : $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + x\ln x = 1$ **و** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

نستنتج أن (C_f) يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 0$

أي (Oy) .

2)- لدينا : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ،

إذن : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln|x| = +\infty$.

و $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln|x|}{x}$

و بما أن : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\ln|x|}{x} = 0$

فإن : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

و هذا يعني أن (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ فرعين شلجميين إتجاههما (Ox) .

3)- أ- بما أن الدالة f مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

إذن فهي قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' + (\ln|x|)'$$
$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}$$
$$= \frac{x-1}{x^2}$$

ب- لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^* : sg[f'(x)] = sg(x-1)$

إذن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

و تناقصية قطعا على المجالين $]0,1]$ **و** $]-\infty,0[$.

و جدول تغيراتها يكون على الشكل التالي :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	||	-	0	+	
f	$+\infty$ ↘ $-\infty$		||	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$	

ج- من خلال جدول تغيرات الدالة f نستنتج أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) \geq 1$$

إذن المعادلة $(E): f(x) = 0$ **لا تقبل حلا في المجال** $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.

و الدالة f تناقصية قطعا على المجال $]-\infty,0[= \mathbb{R}_-^*$

و $f(\mathbb{R}_-^*) = \mathbb{R}$.

إذن المعادلة $(E): f(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا α من المجال** $]-\infty,0[$.

و بما أن : $f(-2) = \dfrac{-1+\ln 4}{2} \succ 0 : (4 \succ e)$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-2+\ln\left(\frac{27}{8}\right)}{3} \prec 0; \left(\frac{27}{8} \prec 4 \prec e^2\right)$$

فحسب مبرهنة القيم الوسيطية لدينا : $-2 \prec \alpha \prec -\dfrac{3}{2}$

وبالتالي (C_f) يقطع (Ox) في نقطة وحيدة أفصولها α .

4)- بما أن f' دالة جذرية فإنها قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ مجموعة تعريفها و لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f''(x) = (f')'(x)$$
$$= \left(\frac{x-1}{x^2}\right)' = \frac{x^2 - (x-1)\times 2x}{(x^2)^2}$$
$$= \frac{x(-x+2)}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

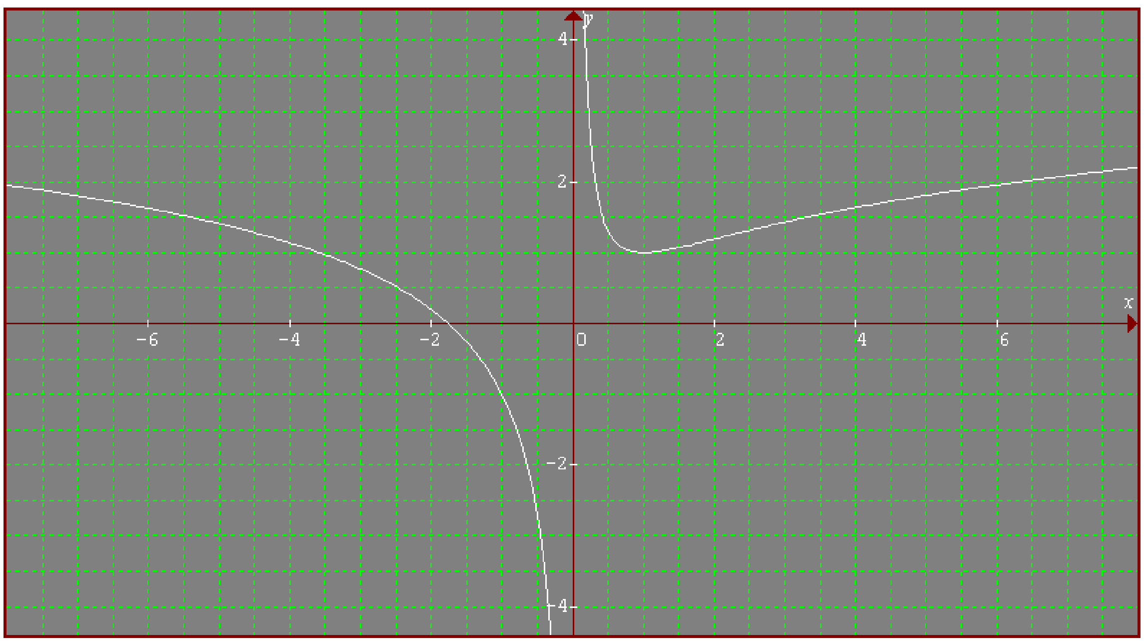
إذن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : sg[f''(x)] = sg[x(2-x)]$

وجدول إشارة $f''(x)$ يكون على الشكل التالي :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	‖ +	0 -	

إذن (C_f) مقعر على المجالين $]-\infty,0[$ و $]2,+\infty[$ و محذب على المجال $]0,2[$ و يقبل نقطة إنعطاف واحدة هي $\Omega\left(2,\frac{1}{2}+\ln 2\right)$.

6)- إنشاء المنحنى (C_f) :



■ **الجزء الثاني:**

1)- أ- لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^*: g(x)=e^{\ln|x|}\times e^{\frac{1}{x}}$

$=e^{\frac{1}{x}+\ln|x|}=e^{f(x)}$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}^*: g(x)=e^{f(x)}$.

ومنه فإن :

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$

إذن (Oy) مقارب أفقي ل (C_g) .

و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} g(x)=0=g(0)$

إذن الدالة g متصلة على يسار $x_0=0$.

ب- لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=1$

فإن (C_g) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته :

$y=x+1$.

لدينا أيضا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x}}=-e^0=-1$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)+x=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=-1$.

إذن (C_g) يقبل بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته : $y=-(x+1)$.

2)- أ- لدينا :

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-e^{\frac{1}{x}}=-e^{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}}=0$ ، إذن g قابلة للإشتقاق على يسار $x_0=0$ و $g'_g(0)=0$

و هذا يعني أن (C_g) يقبل نصف مماس على يسار **0** يوازي (Ox) .

ب- بما أن : $\forall x\in\mathbb{R}^*: g(x)=e^{f(x)}$ ، و الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، فإن g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ، و لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*: g'(x)=f'(x)e^{f(x)}$$

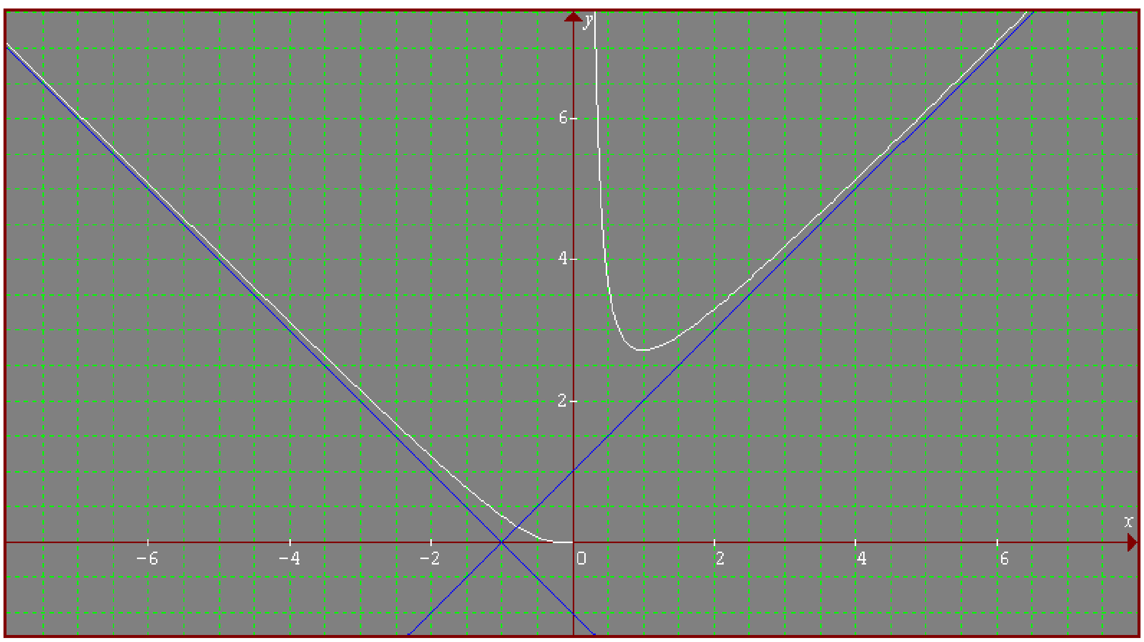
و بالتالي :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*: sg\left[g'(x)\right]=sg\left[f'(x)\right]$$

و جدول تغيرات الدالة g يكون على الشكل التالي :

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	-	‖	-	0	+	
g	$+\infty \searrow 0$	‖	$+\infty \searrow$	e	$\nearrow +\infty$	

3)- <u>إنشاء المنحنى</u> (C_g):



■ **<u>تمرين01</u>:**

1)- لدينا :

$$\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln\left(\sqrt[3]{u_n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ln(u_n)=\frac{1}{3}v_n$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N}: v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n$

و بالتالي فإن (v_n) متتالية هندسية إساسها $q=\dfrac{1}{3}$

و حدها الأول : $v_0=\ln(u_0)=\ln e=1$.

2)- لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}: v_n=v_0\times q^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ لأن : $0\leq\dfrac{1}{3}\prec1$.

3)- أ- لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = v_0 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}$

إذن : $S_n = \dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.

و بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$.

ب- لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\ln(u_k) = \ln\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} u_k\right)$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \ln(P_n)$

هذه يعني أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : P_n = e^{S_n}$.

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n} = e^{\frac{3}{2}}$.

■ **تمرين02:**

1)- الصندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و 2 سوداوين بما أننا في حالة تساوي الإحتمال (لا يمكن التمييز بين الكرات) ، فإن :

$$p(A_0) = \frac{card(A_0)}{card(\Omega)} = \frac{A_4^2}{A_6^2}$$

إذن : $P(A_0) = \dfrac{4\times 3}{6\times 5} = \dfrac{2}{5}$.

و $p(A_1) = \dfrac{card(A_1)}{card(\Omega)} = \dfrac{2\times A_4^1 \times A_2^1}{A_6^2}$

إذن : $P(A_1) = \dfrac{2\times 4\times 1}{6\times 5} = \dfrac{8}{15}$.

و $p(A_2) = \dfrac{A_2^2}{A_6^2} = \dfrac{2\times 1}{6\times 5} = \dfrac{1}{15}$.

لاحظ أن المثلوث (A_0, A_1, A_2) تجزيء للفضاء Ω

و أن : $p(A_0) + p(A_1) + p(A_2) = 1$.

2)- أ- + ب- نحسب الإحتمالات الشرطية :

$p_{A_0}(B_0)$ و $p_{A_1}(B_0)$ و $p_{A_2}(B_0)$.

- إذا تحقق الحدث A_0 فإن الصندوق يحتوي على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين ، إذن :

$$p_{A_0}(B_0) = \frac{A_2^2}{A_4^2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

لدينا في هذه الحالة أيضا :

$$p_{A_0}(B_1) = \frac{2\times A_2^1 \times A_2^1}{A_4^2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

و $p_{A_0}(B_2) = \dfrac{A_2^2}{A_4^2} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

- إذا تحقق الحدث A_1 فإن الصندوق يحتوي على 3 كرات حمراء و كرة واحدة سوداء ، إذن :

$$p_{A_1}(B_0) = \frac{A_3^2}{A_4^2} = \frac{3\times 2}{12} = \frac{1}{2}$$

و في هذه الحالة يكون لدينا :

$$p_{A_1}(B_1) = \frac{2\times A_3^1 \times A_1^1}{A_4^2} = \frac{2\times 3\times 1}{12} = \frac{1}{2}$$

و $p_{A_1}(B_2) = \dfrac{0}{A_4^2} = 0$ (لا يمكن سحب كرتين سوداوين لأن الصندوق يحتوي على كرة واحدة سوداء)

- إذا تحقق الحدث A_2 فإن الصندوق يحتوي على 4 كرات حمراء فقط ، إذن :

$p_{A_2}(B_0) = 1$ و $p_{A_2}(B_1) = p_{A_2}(B_2) = 0$.

نستنتج الآن $p(B_0)$ و $p(B_1)$ و $p(B_2)$.

نطبق صيغة الإحتمالات الكلية ، فنحصل على :

$$p(B_0) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{6} + \frac{8}{15}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{15}\times 1$$

إذن : $p(B_0) = \dfrac{1+4+1}{15} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$.

و $p(B_1) = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{15}\times\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{15}\times 0$

إذن : $p(B_1) = \dfrac{4+4}{15} = \dfrac{8}{15}$.

و $p(B_2) = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{6} + \dfrac{8}{15}\times 0 + \dfrac{1}{15}\times 0$

إذن : $p(B_2) = \dfrac{1}{15}$.

ولاحظ أنه في هذه الحالة لدينا :

$p(B_0) + p(B_1) + p(B_2) = 1$.

ج- نحسب الإحتمال الشرطي : $p_{B_1}(A_1)$.

$$p_{B_1}(A_1) = \frac{p(A_1\cap B_1)}{p(B_1)} = \frac{p(A_1)\times p_{A_1}(B_1)}{p(B_1)}$$

إذن : $p_{B_1}(A_1) = \dfrac{\dfrac{8}{15}\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{8}{15}} = \dfrac{1}{2}$.

3)- لدينا : $R = \{A_0 \to B_2, A_1 \to B_1\}$ ، بمعنى أن الحدث R مكون من سبيلين .

إذن : $p(R)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

4)- إذا سحبنا من الصندوق 3 كرات في آن واحد فكل سحبة ممكنة عبارة عن تأليفة ل 3 عناصر من بين 6 ،

إذن : $card\ (\Omega)=C_6^3=20$

و إذا كان X هو المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة ممكنة بعدد الكرات الحمراء المكونة لها ، فإن :

$X(\Omega)=\{1,2,3\}$ ، **و لدينا :**

$$p(X=1)=\frac{C_4^1\times C_2^2}{20}=\frac{1}{5}$$

و $$p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_2^1}{20}=\frac{3}{5}$$

و $p(X=3)=\frac{C_4^3}{20}=\frac{1}{5}$ **(أنشىء جدولا تحدد فيه قانون إحتمال المتغير العشوائي X)**

إذن : $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$.

■ تمرين03:

1)- معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(2,1,1)$ و شعاعها $r=3$ هي :

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3^2$$

أي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z-3=0$.

2)- لدينا :

$$d(\Omega,(P))=\frac{|2+2\times1-3\times1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}$$

أي : $d(\Omega,(P))=\frac{|-9|}{\sqrt{14}}=\frac{9}{\sqrt{14}}$.

و بما أن : $\frac{3}{\sqrt{14}}\prec 1$ **فإن :** $d(\Omega,(P))\prec r$

إذن $(S)\cap(P)$ دائرة (C) شعاعها R يحقق :

$R=\sqrt{r^2-d^2}$ **حيث :** $d=d(\Omega,(P))$

لدينا : $R=\sqrt{9-\frac{81}{14}}=\sqrt{\frac{45}{14}}=3\sqrt{\frac{5}{14}}$.

مركز الدائرة (C) هي النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (D) المار من Ω و العمودي على المستوى (P) .

لدينا : $$(D):\begin{cases}x=2+t\\ y=1+2t\ /t\in\mathbb{R}\\ z=1-3t\end{cases}$$

و $(2+t)+2(1+2t)-3(1-3t)-10=0$

يكافيء $14t-9=0$ **أي** $t=\frac{9}{14}$.

نعوض في تمثيل (D) فنجد إحداثيات النقطة H :

$H\left(\frac{37}{14},\frac{16}{7},-\frac{13}{14}\right)$.

■ تمرين04:

1)- نضع $z=i\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ ، إذن :

$$P(i\alpha)=(i\alpha)^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)(i\alpha)^2+$$
$4\left(1+i\sqrt{3}\right)(i\alpha)-8i$ ، **أي :**

$$P(i\alpha)=2\sqrt{3}\alpha(\alpha-2)-i\left(\alpha^3+2\alpha^2-4\alpha+8\right)$$

ومنه : $$P(i\alpha)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha(\alpha-2)=0\\ \alpha^3-2\alpha^2-4\alpha+8=0\end{cases}$$

إذن : $P(i\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=2$.

و بالتالي فالمعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا هو $z_0=2i$.

2)- نحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة من الدرجة الثانية :

$$z^2-2\sqrt{3}z+4=0$$

المميز المختصر هو : $\Delta'=\left(-\sqrt{3}\right)^2-4=-1=i^2$

إذن حلي المعادلة هما :

$z_1=\sqrt{3}+i$ **و** $z_2=\sqrt{3}-i$ ($\mathrm{Im}(z_2)\prec 0$)

3)- لدينا :

$$z_0=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$$

و $$z_1=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$$

و $$z_1-z_0=z_2=\overline{z_1}=\left[2,-\frac{\pi}{6}\right]$$

و $$z_2-z_0=\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i^2\right)$$

إذن : $z_2-z_0=\left[2\sqrt{3},-\frac{\pi}{3}\right]$.

4)- لدينا :

$$z_1-z_0=z_2-0\Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=aff\left(\overrightarrow{OC}\right)$$

إذن : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ **هذا يعني أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .**

و بما أن : $\overline{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}\right)} = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B}\right)[2\pi]$ و $\dfrac{z_C - z_A}{z_B} = \dfrac{z_2 - z_0}{z_1} = \left[\sqrt{3}, -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right]$ فإن : $\overline{\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{AC}\right)} = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. إذن قطرا متوازي الأضلاع $OABC$ متعامدان و بالتالي فهو معين . abouzakariya@yahoo.fr	و ما نيل المطالب بالتمني و لكن تأخذ الدنيا غلابا abouzakariya@yahoo.fr