الشعبة : علوم تجريبية ثانوية المختار السوسي المعازيز نيابة الخميسات	تصحيح الإمتحان التجريبي لنيل شهادة الباكالوريا دورة أبريل 2006 ❶ http://www.madariss.fr❶	من إنجاز الأستاذ: علي الشريف المادة : الرياضيات cherifalix@yahoo.fr

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} \end{cases}$

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $v_n = u_n + k$

(k عدد حقيقي ثابت غير مرتبط بالعدد n)

1) حساب v_{n+1} بدلالة u_n ثم بدلالة v_n .

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} + k = \frac{1}{4}.u_n + \frac{9}{4} + k$

$= \frac{1}{4}(v_n - k) + \frac{9}{4} + k$

و منه : $v_{n+1} = \frac{1}{4}.v_n + \frac{3}{4}.k + \frac{9}{4}$

2) تحديد k بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية .

من أجل ذلك يكفي أن يكون : $\frac{3}{4}.k + \frac{9}{4} = 0$

يعني : $k = -3$

إذن في هذه الحالة تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

و حدها الاول : $v_0 = u_0 - 3 = 1$

3) حساب نهايتي (u_n) و (v_n) .

بما أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و حدها الاول $v_0 = 1$.

فإن : $v_n = v_0.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-0}$ يعني : $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

بما أن : $0 \langle \frac{1}{4} \langle 1$ فإن : $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

و بما أن : $v_n = u_n + k$ فإن : $u_n = v_n - k$

يعني : $u_n = v_n + 3$

و منه : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 3}$

التمرين الثاني :

الفضاء (E) منسوب على معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط : $A(2;0;2)$ و $B(1;-1;3)$ و $C(0;-2;1)$

1) حساب $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1\,;-1\,;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\,;-2\,;-1)$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}.\vec{k}$

يعني : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$

2) معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) :

لدينا المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى ABC

إذن : $(ABC): 3x - 3y + d = 0$

بما أن : $A \in (ABC)$ فإن : $d = -6$.

و بالتالي : $(ABC): 3x - 3y - 6 = 0$

3) معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و تقطع (ABC) حسب الدائرة (ζ) التي مركزها B و شعاعها 2 .

ليكن **R** شعاع الفلكة (S) و **r** شعاع الدائرة (ζ) .

لدينا: $d^2 + r^2 = R^2$

بحيث : $d = AB = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ و $r = 2$.

و منه : $R = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$

و بالتالي : $(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=7$

يعني : $x^2+y^2+z^2-4x-4z+1=0$

التمرين الثالث :

نعتبر صندوق يحتوي على ثلاث كرات صفراء , كرتين زرقاوتين , كرة حمراء و أربع كرات خضراء لايمكن التمييز بين الكرات باللمس . نسحب عشوائيا كرة من الصندوق .

1 - حساب إحتمالات الأحداث التالية :

J : " سحب كرة صفراء " $P(J)=\frac{3}{10}$

B : " سحب كرة زرقاء " $P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

R : " سحب كرة حمراء " $P(R)=\frac{1}{10}$

V : " سحب كرة خضراء " $P(V)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

2 - نعتبر الآن أن السحب مرتبط بربح عدد من الدراهم حسب الشروط التالية :

- إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نربح 10 دراهم .

- إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء نربح درهمان .

- إذا كانت الكرة المسحوبة صفراء أو زرقاء نربح 3 دراهم .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الدراهم المربوحة .

أ- حدد قانون إحتمال المتغير العشوائي X .

لدينا : $X(\Omega)=\{2;3;10\}$

إذن : $P(X=2)=P(V)=\frac{2}{5}$

$$P(X=3)=P(J\cup B)=P(J)+P(B)-P(J\cap B)$$
$$=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$$
$$P(X=10)=P(R)=\frac{1}{10}$$

و بالتالي قانون إحتمال المتغير العشوائي X :

$(X=x_i)$	2	3	10
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

ب - حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i.P(X=x_i)$$
$$=2.\frac{2}{5}+3.\frac{1}{2}+10.\frac{1}{10}=\frac{33}{10}$$

- حساب المغايرة $V(X)$:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{3}p_i.(x_i-E(x))^2$$
$$=\frac{2}{5}.\left(2-\frac{33}{10}\right)^2+\frac{1}{2}.\left(3-\frac{33}{10}\right)^2+\frac{1}{10}.\left(10-\frac{33}{10}\right)^2$$

التمرين الرابع :

نعتبر في C المعادلة التالية : $(E) : z^3-8z^2+24z-32=0$

1) $z_0=4$ حل للمعادلة (E) :

$$4^3-8\times4^2+24\times4-32=0$$

تحديد الأعداد a و b و c بحيث (E) تكتب على شكل :

$$*\quad (E) : (z-4)(az^2+bz+c)=0$$
$$(z-4)(a.z^2+b.z+c)=a.z^3+b.z^2+c.z$$
$$-4.a.z^2-4.b.z-4c$$
$$=a.z^3+(b-4a).z^2+(c-4b).z-4c$$

إذن (E) **تكتب على الشكل** * يعني :

$$a.z^3+(b-4a).z^2+(c-4b).z-4c$$
$$=z^3-8.z^2+24.z-32$$

الشعبة : علوم تجريبية ثانوية المختار السوسي المعازيز نيابة الخميسات	تصحيح الإمتحان التجريبي لنيل شهادة الباكالوريا دورة أبريل 2006 ❸ http://www.madariss.fr ❸	من إنجاز الأستاذ: علي الشريف المادة : الرياضيات cherifalix@yahoo.fr

$$\begin{cases} a=1 \\ b-4a=-8 \\ c-4b=24 \\ -4c=-32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8+4=-4 \\ c=24+4b=24-16=8 \\ c=\frac{32}{4}=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=8 \end{cases}$$

و بالتالي : $(E):(z-4)(z^2-4.z+8)=0$

2 - حل المعادلة (E) **. نرمز ب** z_1 **و** z_2 **بحيث لحلي المعادلة**

بحيث : $\operatorname{Im}(z_1)\geq 0$ و $\operatorname{Im}(z_2)\leq 0$.

المعادلة (E) **تكافئ** : $(E):(z-4)(z^2-4.z+8)=0$

تكافئ : $(z-4)=0$ **أو** $(z^2-4.z+8)=0$

$(z^2-4.z+8)=0$: $\Delta'=4-8=-4=(2i)^2$

إذن : $z_1=2+2.i$ و $z_2=2-2.i$

و بالتالي حلول المعادلة هي : $S=\{\,4\,;2+2i\,;2-2i\,\}$

الشكل الأسي ل Z_1 **و** Z_2 : $z_1=2\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2=2\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}}$

3 – النقط $M_0\,;M_1\,;M_2$ **التي لواحقها على التوالي** $z_0\,;\,z_1\,;\,z_2$ **تنتمي إلى دائرة** (ζ) **مركزها** Ω **ذات اللحق** $\omega=2$ **و شعاعها** $R=2$.

لدينا : $|z_0-z_\Omega|=|4-2|=2$ و $|z_1-z_\Omega|=|2i|=2$

و $|z_2-z_\Omega|=|-2i|=2$

و هذا يكافئ أن : $\Omega M_0=\Omega M_1=\Omega M_2$ **يعني أن النقط** $M_0;M_1;M_2$ **تنتمي إلى الدائرة التي مركزها** Ω **ذات اللحق** $\omega=2$ **و شعاعها** $R=2$.

مسألة :

الجزء الاول :

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{x+2}{x+1}+\ln|x+1|$$

1) أ - مجموعة تعريف الدالة f : $\boxed{D_f=IR-\{-1\}}$

ب - لدينا لكل x **ينتمي إلى** D_f :

$$f(x)=\frac{x+2+(x+1)\ln|x+1|}{x+1}$$

إذن : $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x+2+(x+1)\ln|x+1|}{x+1}$

$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{x+2+(x+1)\ln(x+1)}{x+1}\quad (x+1\rangle 0)$$

نعلم أن : $\lim\limits_{t\to0^+}t.\ln(t)=0$ **بوضع :** $t=x+1$

لدينا : $t\to0^+\Leftrightarrow x\to-1^+$

إذن : $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t+1+t\ln(t)}{t}=+\infty$

ج - دراسة الدالة f **(- التغيرات)**

النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$

التغيرات : $f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$: $(\forall x\in D_f)$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 2 \nearrow +\infty$	

نقطة الإنعطاف :

لدينا : $$(\forall x \in D_f) : f''(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

نستنتج أن : (C) يقبل $I(1\,;\, f(1))$ كنقطة آنعطاف .

تقعر المنحنى :

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
$f''(x)$	$+$ ‖ $+$ 0 $-$
(C)	∪ ‖ ∪ نقطة آنعطاف ∩

ب – معادلة المماس عند النقطة التي أفصولها 2 - :

$$\Leftrightarrow \quad y = (x+2)f'(-2) + f(-2)$$

$$\boxed{y = -2x - 4}$$

- معادلة المماس عند النقطة $I(1\,;\, f(1))$:

$$\Leftrightarrow \quad y = (x-1)f'(1) + f(1)$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4} + \ln(2)$$

ج – الفروع اللانهائية :

* لدينا : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ و

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ و هذا يعني أن (C) يقبل المستقيم الذي معادلته : $x = -1$

مقارب عمودي بجوار 1 - .

لدينا :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x} \cdot \frac{\ln(|x+1|)}{x+1}$$
$$= 0$$

إذ ن (C) يقبل محور الافاصيل آتجاه مقارب بجوار $\pm\infty$.

د – إنشاء المنحنى (C) :

ملا حظة : قبل إنشا ء ا لمنحنى يجب آتباع الخطوات التالية :

1) قراءة جيدة لجدول التغيرات و تقعر المنحنى و أخذ فكرة عن الشكل الذي سيأخذه المنحنى .

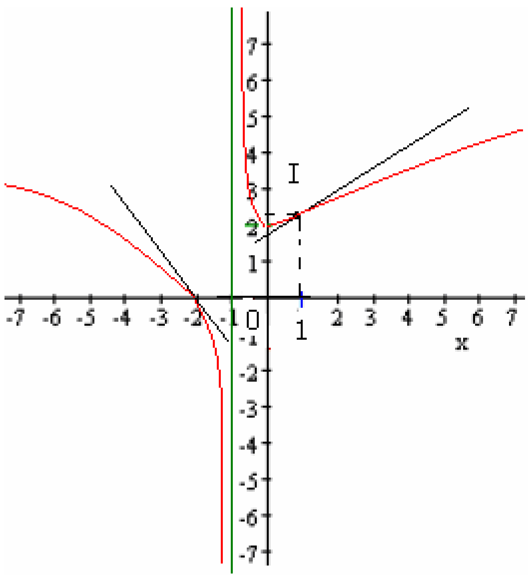
2) إنشاء المقاربات إنطلاقا من النتائج المحصل عليها .

3) إنشاء النقط التي توجد بها قيم دنوية أو قصوية للمنحنى (C) و نقطة الإنعطاف. (في حالة وجودها)

4) إنشاء المستقيمات ا لمماسات التي طلب تحديد معادلتها .

5) قراءة للوضع النسبي للمنحنى (C) مع المقاربات و المماسات إما عن طريق جدول التغيرات أو بواسطة تحديد الإشارة

6) الإنشاء :



ملاحظة : المماس عند النقطة يخترق المنحنى (C) لأن النقطة I نقطة انعطاف .

3) إشارة $f(x)$ من خلال جدول التغيرات نستنتج :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0 $-$	$\Vert$	$-$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة g المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} g(x) = e^{(x+2)\ln|x+1|} ; & x \neq -1 \\ g(-1) = 0 \end{cases}$$

1) أ - لنبين أن لكل عدد حقيقي x مختلف عن -1

لدينا : $g(x) = |x+1|e^{(x+1)\ln|x+1|}$

لكل عدد حقيقي x مختلف عن -1

لدينا : $g(x) = e^{(x+2)\ln|x+1|}$

$$g(x) = e^{(x+1+1)\ln|x+1|}$$

و هذا يكافئ :

$$= e^{(x+1)\ln|x+1| + \ln|x+1|}$$

$$= e^{\ln|x+1|} \times e^{(x+1)\ln|x+1|}$$

و منه لكل عدد حقيقي x مختلف عن -1

لدينا : $g(x) = |x+1|e^{(x+1)\ln|x+1|}$ $\quad$ ($e^{\ln|x+1|} = |x+1|$)

ب - اتصال الدالة g عند -1 :

* لدينا :

$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} (x+1).e^{(x+1).\ln(x+1)}$$

$$= 0 = g(-1)$$

و

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} -(x+1).e^{-(-(x+1)).\ln(-(x+1))}$$

$$= 0 = g(-1)$$

ج - اشتقاق الدالة g عند -1 :

*** لدينا :**

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)e^{(x+1).\ln(x+1)}}{x+1} = 1$$

و

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-(x+1)e^{-(-(x+1)).\ln-(x+1)}}{x+1} = -1$$

إذن الدالة g غير قابلة للإشتقاق عند -1 .

2) الدالة g قابلة للإشتقاق على $IR - \{-1\}$.

و لدينا : $(\forall x \in IR - \{-1\}) : \ g'(x) = f(x).e^{(x+2).\ln|x+1|}$

نستنتج أن إشارة $g(x)$ هي إشارة $f(x)$.

و بالتالي نستنتج جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0 $-$	$\Vert$	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow$	1 $\searrow$	0	$\nearrow +\infty$

3) أ - الفروع اللانهائية :

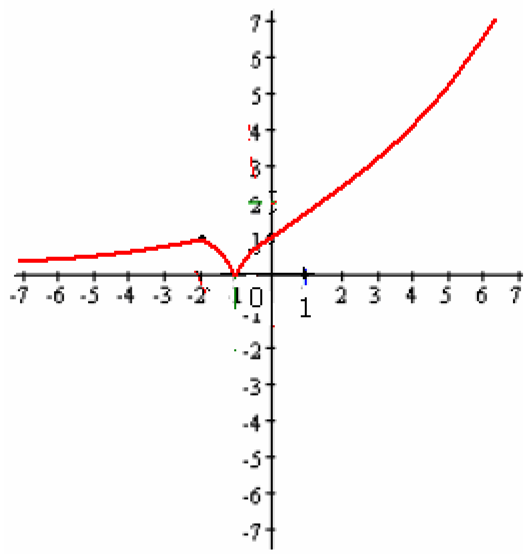
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x+1|}{x}.e^{(x+1).\ln|x+1|}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)}{x}.e^{(x+1).\ln(x+1)} = +\infty$$

و هذا يعني أن منحنى الدالة g يقبل بجوار $+\infty$ محور الأراتيب فرعا شلجميا .

من إنجاز الأستاذ: علي الشريف
المادة : الرياضيات
cherifalix@yahoo.fr

ب - منحنى الدالة g :



4) نعتبر المعادلة : $m^{\frac{1}{x+2}} = |x+1| \quad : \quad x \in IR$

حيث m بارامتر حقيقي .

المعادلة تكافئ : $\left(m^{\frac{1}{x+2}}\right)^{x+2} = |x+1|^{x+2}$

تكافئ أيضا : $m = e^{(x+2).\ln|x+1|}$

تكافئ : $g(x) = m \qquad x \in IR$

من خلال التمثيل المبياني للدالة g نستنتج أن:

حلول المعادلة هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنى (Γ) و المستقيم الذي معادلته $y = m$ و منه :

1 _ إذا كان : $m \langle 0$: فإن المعادلة لا تقبل أي حل .

2 _ إذا كان : $m = 0$: فإن المعادلة تقبل حل وحيد هو العدد **1 -** .

3 _ إذا كان : $0 \langle m \langle 1$: فإن المعادلة تقبل ثلاث حلول .

4 _ إذا كان : $m = 1$: فإن المعادلة تقبل حلين هما **2 -** و **0** .

5 _ إذا كان : $m \rangle 1$: فإن المعادلة تقبل حل وحيد .