

امتحان تجريبي (علوم تجريبية)

نيابة فاس الجديد دار دبيغ

التمرين الأول

-1

$$f(0)=0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^{-x} + x^2) = 0 \text{ أي } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ إذن } f \text{ متصلة في } 0$$

-2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^{-x} + x^2) \\ &= +\infty \\ &\text{شكل محدد} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{3} - \sqrt[3]{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

-3

أ-

$$\begin{aligned} \forall x \in]-\infty, 0[: f(x) &= \ln(e^{-x} + x^2) \\ &= \ln(e^{-x} (1 + x^2 e^x)) \\ &= \ln(e^{-x}) + \ln(1 + x^2 e^x) \\ &= -x + \ln(1 + x^2 e^x) \end{aligned}$$

ب-

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + x^2 e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + 4 \left(\frac{x}{2} \right)^2 e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \right) = 0 \text{ فإن المستقيم } y = -x \text{ مقارب مائل لمنحنى الدالة } f$$

بجوار $-\infty$

ج-

لكل $x < 0$ لدينا : $f(x) - (-x) = \ln(1 + x^2 e^x) > 0$ (لأن $1 + x^2 e^x > 1$) أي $f(x) > -x$ إذن C_f فوق المقارب المائل $y = -x$.

د-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3} \cdot \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt[3]{1+x} = -\infty \cdot \end{aligned}$$

إذن منحنى الدالة يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y = \frac{x}{3}$ بجوار

-4

بما أن :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 + \frac{x}{3} - \sqrt[3]{1+x}}{x} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{x}{3} - (\sqrt[3]{1+x} - 1)}{x} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{x}{3} - \frac{1+x-1}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}}{x} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{x}{3} - \frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}}{x} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

فإن f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $f'_d(0) = 0$. منحني الدالة f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأفصايل على يمين الصفر.

بما أن :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(e^{-x} + x^2)}{x} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(e^{-x}) + \ln(1 + x^2 e^x)}{x} \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^x)}{x^2 e^x} \times x e^x \\
&= -1
\end{aligned}$$

فإن f قابلة للاشتقاق على يسار 0 و $f'_g(0) = -1$. منحني الدالة f يقبل نصف مماس على يسار الصفر معاملته الموجه هو -1

-5

$$\begin{aligned}
(\forall x \in \mathbb{R}_-^*): f'(x) &= \frac{-e^{-x} + 2x}{e^{-x} + x^2} \\
&= \frac{-e^{-x} \cdot e^x + 2x \cdot e^x}{e^{-x} \cdot e^x + x^2 \cdot e^x} \\
&= \frac{-1 + 2x \cdot e^x}{1 + x^2 \cdot e^x} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\forall x \in \mathbb{R}_+^*): f'(x) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{3}-1} \\
&= \frac{1}{3} \left(1 - (1+x)^{-\frac{2}{3}} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} \right)
\end{aligned}$$

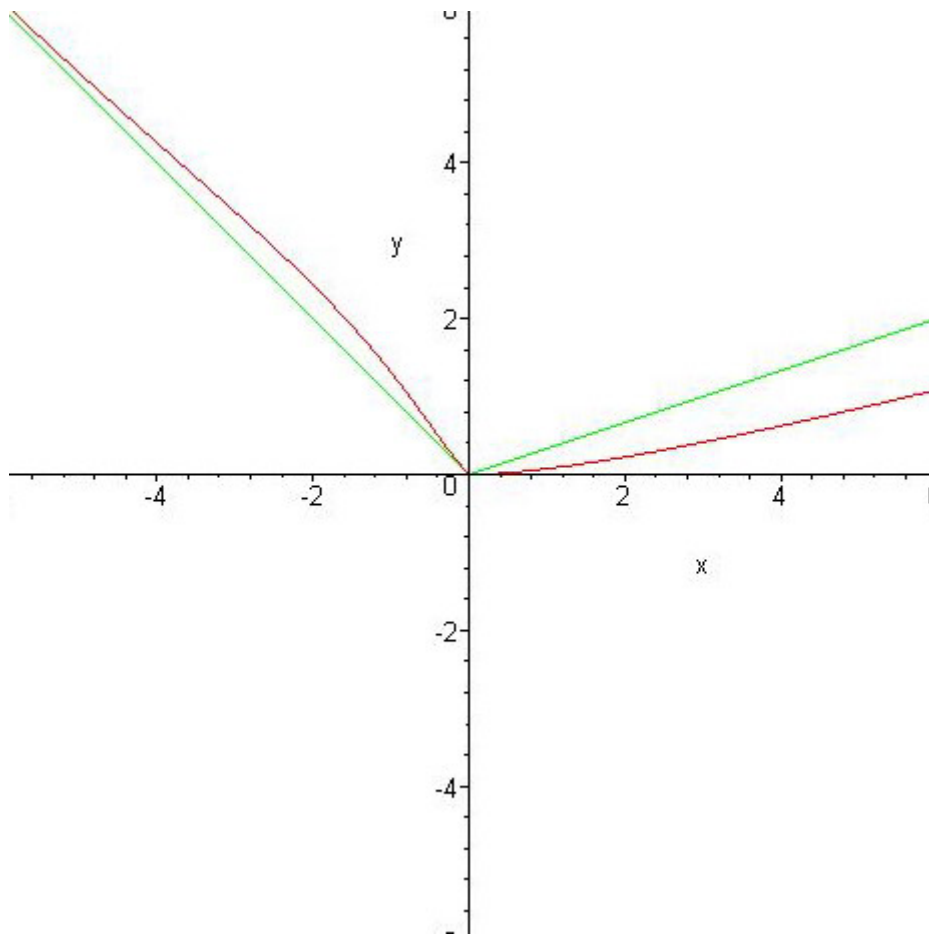
لاحظ أنه لكل $x > 0$ ، $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} < 1$ أي

$$f'(x) > 0$$

-6

$f(x)$	$f'(x)$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

-7



-8

أ- دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ هي الدالة $(k \in \mathbb{R}) x \mapsto \frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x} + k$

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ و تتعدم في الصفر هي الدالة $x \mapsto \frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x} - \frac{3}{4}$

-ب-

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^7 (\sqrt[3]{1+x} - 1) dx \\
&= \left[\frac{3}{4} (1+x) \sqrt[3]{1+x} - \frac{3}{4} - x \right]_0^7 \\
&= \frac{17}{4} \\
S &= \int_0^7 \left| f(x) - \frac{x}{3} \right| dx \\
&= \int_0^7 |1 - \sqrt[3]{1+x}| dx \\
&= \int_0^7 (\sqrt[3]{1+x} - 1) dx \\
&= \frac{17}{4}
\end{aligned}$$

التمرين الثاني (3 ن)

-1

أي $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \left(\begin{array}{c|c|c} -2 & 0 & -4 \\ \hline -4 & 0 & -7 \\ \hline -4 & -7 & -2 \end{array} \right)$ إذن $\overline{AC}(-7;0;0)$ و $\overline{AB}(-4;-2;-4)$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} (0;28;-14)$$

مساحة المثلث ABC هي

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\| \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 28^2 + (-14)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{784 + 196} \\
&= 7\sqrt{5}
\end{aligned}$$

-2

$$\begin{aligned}
\left| \sin \left(\overline{AB} \wedge \overline{AC} \right) \right| &= \frac{\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|}{\|\overline{AB}\| \|\overline{AC}\|} \\
&= \frac{14\sqrt{5}}{6 \times 7} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}$$

-3

$$\begin{aligned}
 d(B, (AC)) &= \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|AC\|} \\
 &= \frac{14\sqrt{5}}{7} \\
 &= 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

-4

بما $[AB] \subset (ABC)$ فإن Ω منتصف القطعة $[AB]$ أي مركز الفلحة ينتمي إلى المستوى (ABC) إذن $d(\Omega, (ABC)) = 0 < \frac{AB}{2}$ و عليه فإن الفلحة تقطع المستوى وفق دائرة كبرى مركزها Ω و شعاعها $\frac{AB}{2}$

التمرين الثالث (3.5 ن)

-1

كون الامكانيات يتكون من تأليفات ل 3 كرات من بين 10 كرات

$$\begin{aligned}
 \text{card}\Omega &= C_{10}^3 \\
 &= \frac{10!}{3! \times 7!} \\
 &= \frac{8 \times 9 \times 10}{6} \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

-2

أ-

احتمال الحدث A :

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} \\
 &= \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_3^3}{120} \\
 &= \frac{1 + 4 + 1}{120} \\
 &= \frac{1}{20}
 \end{aligned}$$

احتمال الحدث B :

$$\begin{aligned}
 P(B) &= 1 - \frac{C_7^3}{120} \\
 &= \frac{85}{120}
 \end{aligned}$$

ب-

$$P(A \cap B) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120} \quad \text{"الحصول على 3 كرات حمراء"}$$

الحدثان غير مستقلين لأن $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

-3

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$$

$$P(x=0) = \frac{C_7^3}{120} = \frac{35}{120}$$

$$P(x=1) = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{120} = \frac{3 \times 21}{120} = \frac{63}{120}$$

$$P(x=2) = \frac{C_3^2 \times C_7^1}{120} = \frac{3 \times 7}{120} = \frac{21}{120}$$

$$P(x=3) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$$

-4

$$\begin{aligned} P &= C_5^2 \times (P(A))^2 (1-P(A))^3 \\ &= C_5^2 \times \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^3 \end{aligned}$$

التمرين الرابع (3 ن)

-1

أ- المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا αi يعني :

$$(-\alpha^2 + \alpha(1-\sqrt{3}) + \sqrt{3}) + (1-\alpha)i = 0 \text{ يعني } (\alpha i)^2 - (1+i(1-\sqrt{3}))(\alpha i) + i + \sqrt{3} = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ أي } (-\alpha^2 + \alpha(1-\sqrt{3}) + \sqrt{3}) = 0 \text{ و } 1-\alpha = 0$$

إذن (E) تقبل حلا تخيليا صرف و هو $z_0 = i$.ب- ليكن z_1 الحل الثاني للمعادلة (E) :

$$z_1 = 1+i(1-\sqrt{3})-i = 1-i\sqrt{3} \text{ أي } z_0 + z_1 = 1+i(1-\sqrt{3})$$

-2

أ-

$$z_C = 1-i\sqrt{3} = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_B = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$z_A = 1+i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

ب-

$$\begin{aligned} \left(\overline{AB, AC}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(i(\sqrt{3}+1)\right)[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

-3

[AC] هو واسط القطعة M إذن مجموعة النقط $MC = MA$ أي $|z-1+i\sqrt{3}| = |z-1-i| \Leftrightarrow |z-z_C| = |z-z_A|$

3

التمرين الخامس (3 ن)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = 2u_n - 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

-1

البرهان بالترجع:

لدينا $u_0 > 1$ حسب معطيات التمريننفترض أنه توجد رتبة n_0 من \mathbb{N} حيث $\forall n \leq n_0 : u_n > 1$

$$\forall n \leq n_0 : u_n > 1 \Leftrightarrow \forall n \leq n_0 : 2u_n > 2$$

$$\Leftrightarrow \forall n \leq n_0 : 2u_n - 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow \forall n \leq n_0 : u_{n+1} > 1$$

وعليه فإن $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$ **-2**

أ-

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}) : v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= 2u_n - 2 \\ &= 2(u_n - 1) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

إذن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 و $v_0 = u_0 - 1 = 1$

الحد العام $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n$

ب-

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : w_{n+1} - w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

$$= \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2u_n - 1 - 1}{u_n - 1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2(u_n - 1)}{(u_n - 1)}\right)$$

$$= \ln 2$$

إذن $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $\ln 2$ و $w_0 = \ln(v_0) = 0$

الحد العام $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = n \ln 2 = \ln 2^n$

ج-

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{w_n}{v_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} \ln 2 \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(n \frac{\ln 2}{2} \right)^2}{\left(e^{\frac{n \ln 2}{2}} \right)^2} \times \frac{4}{\ln 2} \\ &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{h}{e^h} \right)^2 \times \frac{4}{\ln 2} \\ &= 0\end{aligned}$$