



أسئلة (3 نقط)

- 1- أ. تحقق أن الدالة v المعرفة بما يلي: $v(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ دالة أصلية للدالة: $x \mapsto x$,
ب. باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب التكامل: $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$,
2- بتغيير المتغير أحسب التكامل: $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$ (ضع: $x = t + \sqrt{t^2 + 1}$),
3- في الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المستوى (P) و الفلكة (S) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتية:

$$(P): x + y + z + 1 = 0$$

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 11 = 0$$

بين أن (P) مماس للفلكة (S) وفق نقطة H محددًا إحداثيتها,
(الأسئلة الثلاث السابقة غير مرتبطة فيما بينها)

تمرين (5 نقط)

- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} الحدودية: $P(z) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i$,
1- بين أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلاً تخيلياً صرفاً يجب تحديده,
2- حدد العددين a و b بحيث: $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$,
3- أ. حل في \mathbb{C} المعادلة: $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$,
ب. استنتج الشكل الجبري والشكل الهندسي لحلول المعادلة: $P(z) = 0$.
4- نعتبر في المستوى العقدي المنسوب لمعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) النقط: $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$.
بحيث: $z_A = i$ و $z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$. C هي ممتالة النقطة B بالنسبة لمحور الأفصيل.
أ. حدد z_C .
ب. حدد معيار وعمدة العدد العقدي: $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
ج. استنتج طبيعة المثلث ABC .

سألة (12 نقطة)

الجزء الأول m دالة عددية معرفة على \mathbb{R} بما يلي: $m(x) = (2 - x)e^x - 1$.

- 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} m(x)$.
2- حدد $m'(x)$ واستنتج جدول تغيرات الدالة m .
3- أ. بين أن المعادلة $m(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين α و β (نفترض $\alpha < \beta$).
ب. حدد بدلالة α و β إشارة $m(x)$.
ج. بين أن: $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$.

الجزء الثاني f دالة عددية معرفة بما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ و نضع $h(x) = e^x - x$.

- 1- أ. حدد $h'(x)$ واستنتج جدول تغيرات الدالة h .
ب. بين أن: $\forall x \in \mathbb{R}; h(x) \geq 1$ و استنتج أن الدالة f معرفة على \mathbb{R} .



2- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3- أ. بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{m(x)}{(e^x - x)^2}$.

ب. استنتج جدول تغيرات الدالة f .

ج. بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ بنفس الطريقة نبين أن : $f(\beta) = \frac{1}{\beta - 1}$.

4- أنشئ في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) منحنى الدالة f (ناخذ : $\alpha = -1,2$ و $\beta = 1,9$ و $f(\alpha) = -0,5$ و $f(\beta) = 1,2$).

5- أحسب التكامل $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx$ وأول هندسيا هذه النتيجة.

الجزء الثالث g دالة عددية معرفة بما يلي : $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$.

1- حدد D_g حيز تعريف الدالة g و بين أن g تزايدية قطاعا على D_g .

2- نضع : $I = [-2; 0]$. بين أن $g(I) \subset I$. (لاحظ أن : $\ln 2 < 1$).

3- (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بما يلي : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$.

أ. بين بالترجع أن

$\forall n \in \mathbb{N}^*; -2 \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq 0$

• المتتالية (u_n) تزايدية.

ب. حدد رتبة المتتالية (v_n) .

4- k دالة عددية معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $k(x) = \ln(1+x) - x$.

أ. بين أن k تناقصية على المجال $[0, +\infty[$.

ب. أحسب $k(0)$ واستنتج أن : $\forall x \in [0, +\infty[; \ln(1+x) \leq x$.

5- أ. تحقق أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$ (لاحظ أن : $v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$).

ب. استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.

ج. بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

6- استنتج أن : $\lim u_n = \lim v_n = \alpha$.

0,5

0,5

0,5

0,25

1

0,5

1

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,5

0,25

0,5

0,25