التمرين الأول :

1 . لدينا $f(x)=2x^2+x-2$ إذن $f'(x)=4x+1$ و $f''(x)=4$

$$f''(x)-3f'(x)+2f(x)=4-3(4x+1)+2\left(2x^2+x-2\right)$$
$$=4-12x-3+4x^2+2x-4$$
$$=4x^2-10x-3$$

إذن الدالة f تحقق المعادلة التفاضلية (E).

ومنه فان الدالة f حل خاص للمعادلة (E)

2 . أ . نحل المعادلة التفاضلية $y''-3y'+2y=0$

لدينا المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية هي $r^2-3r+2=0$ **بحساب المميز** $\Delta=(-3)^2-4\times 2=1$ **نجد الحلين هما** $r_1=1$ و $r_2=2$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هي الدوال المعرفة ب : $y:x\to\alpha e^x+\beta e^{2x}$ **حيث** $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

ب . الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) **هو الدوال:** $y:x\to\alpha e^x+\beta e^{2x}+2x^2+x-2$ **حيث** $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

3 . لدينا $y(0)=0$ **إذن** $\alpha+\beta-2=0$

لدينا $y'(x)=\alpha e^x+2\beta e^{2x}+4x+1$ **و** $y'(0)=4$ **إذن** $\alpha+2\beta+1=4$

نحصل على النظمة التالية $\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha+2\beta=3\end{cases}$ **نجد** $\alpha=\beta=1$

إذن الحل الخاص هو $y_0:x\to e^x+e^{2x}+2x^2+x-2$

التمرين الثاني :

.1 لدينا $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **متتالية هندسية حدها الأول** $u_1=2$ **و أساسها** $q=\frac{1}{2}$ **إذن الحد العام هو** $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$

و منه فان $u_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}^*$.

2 . أ . لدينا $V_n=1-\frac{u_n}{n}$ **و** $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ **إذن** $V_n=1-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

ب . لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=0$ **إذن** $\lim\limits_{x\to+\infty}v_n=1$ **.**

3 . لدينا:

$$S_n'+S_n=\left(v_1+2v_2+3v_3+\dots\dots\dots+nv_n\right)+\left(u_1+u_2+\dots\dots u_n\right)$$
$$=\left((1-\frac{u_1}{1})+2\left(1-\frac{u_2}{2}\right)+3\left(1-\frac{u_3}{3}\right)+\dots\dots\dots+n\left(1-\frac{u_n}{n}\right)\right)+\left(u_1+u_2+\dots\dots u_n\right)$$
$$=\left(1-u_1+2-u_2+3-u_3+\dots\dots\dots+n-u_n\right)+\left(u_1+u_2+\dots\dots u_n\right)$$
$$=\ (1+2+3\dots.+n)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{10} = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$$
$$= u_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}}$$
$$= 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$$
$$= 4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$= 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{8}$$
$$= 4 - \frac{1}{256}$$
$$= \frac{1023}{256}$$

لدينا $S'_n + S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ إذن $S'_{10}+S_{10} = \frac{10(10+1)}{2} = 55$ ومنه فان

$$S'_{10} = 55 - S_{10} = 55 - \frac{1023}{256} = \frac{13057}{256}$$

التمرين الثالث :

I- لدينا الدالة العددية h المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $h(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln x$

1 . بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} 2x\sqrt{x} - 2 = -2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \ln x = -\infty$ إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} h(x) = -\infty$

* لدينا $h(x) = x\left(2\sqrt{x} - \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)$ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$

فان $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

2 . لدينا لكل x من $]0,+\infty[$:

$$h'(x) = (2x)'\sqrt{x} + 2x\left(\sqrt{x}\right)' + \left(\ln x\right)'$$
$$= 2\sqrt{x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$
$$= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$
$$= 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

بما أن $3\sqrt{x} \succ 0$ و $\frac{1}{x} \succ 0$ فان $h'(x) \succ 0$ و منه فان الدالة h تزايدية على $]0,+\infty[$

ب . لدينا $h(1)=2-2+\ln(1)=0$

إذا كان $x\in\left]0,1\right]$: لدينا $x\le 1$ إذن $h(x)\le h(1)$ أي $h(x)\le 0$

إذا كان $x\in\left[1,+\infty\right[$: لدينا $x\ge 1$ إذن $h(x)\ge h(1)$ أي $h(x)\ge 0$

II) 1 . أ. لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}(\ln x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

و لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}x-1=-1$ إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}}f(x)=+\infty$

التأويل الهندسي : المنحنى (C) يقبل مقارب رأسي معادلته $x=0$.

ب . لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$ = $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ إذن المنحنى (C) يقبل مقارب مائل معادلته $y=x-1$.

2 . أ . لكل x من المجال $\left]0,+\infty\right[$ لدينا :

$$f'(x)=1-\frac{(\ln x)'\sqrt{x}-(\ln x)\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{x}^2}$$
$$=1-\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-(\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$=1-\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$=1-\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2x\sqrt{x}-2+\ln x}{2x\sqrt{x}}$$
$$=\frac{h(x)}{2x\sqrt{x}}$$

ب . لدينا $f'(x)=\frac{h(x)}{2x\sqrt{x}}$ لكل x من المجال $\left]0,+\infty\right[$

بما أن $2x\sqrt{x}\succ 0$ فان إشارة $f'(x)$ هي إشارة $h(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	**0**		**1**		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	**0**	↗	$+\infty$

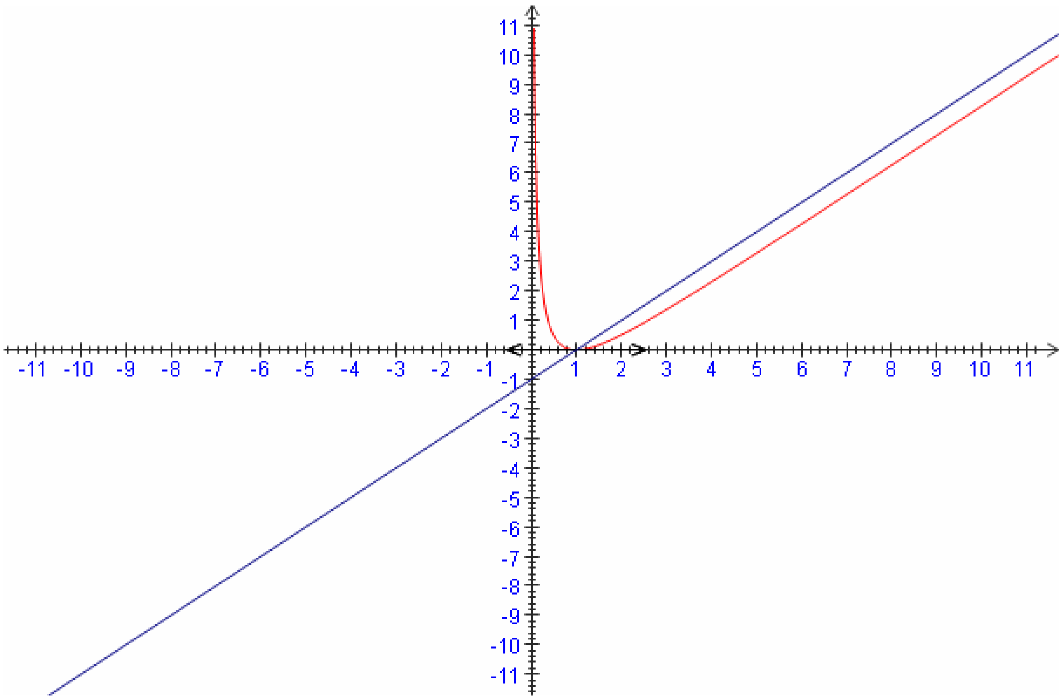
3 . أ . لدينا $f(x)-(x-1)=-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

إشارة $f(x)-(x-1)$ هي عكس إشارة $\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-(x-1)$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي ل: (C) و (D)	‖	المنحنى (C) فوق المستقيم (D)	A	المنحنى (C) تحت المستقيم (D)	

$A(1,0)$ هي نقطة تقاطع المنحنى (C) و المستقيم (D).

ب. المنحنى (C) :



(D)

(C)

4. نضع $\begin{cases} u(x)=\ln x \\ v'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v(x)=2\sqrt{x} \end{cases}$ ومنه فان

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}\,dx$$

$$=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^e-2\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$=\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^e-2\left[2\sqrt{x}\right]_1^e$$

$$=\left[\left(2\sqrt{e}\ln e\right)-\left(2\ln(1)\right)\right]-2\left(2\sqrt{e}-2\right)$$

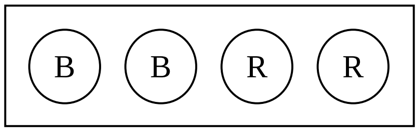
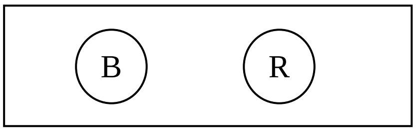
$$=2\sqrt{e}-4\sqrt{e}+4$$

$$=4-2\sqrt{e}$$

المساحة المطلوبة هي :

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^e f(x)\,dx \\
&= \int_1^e \left(x - 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right) dx \\
&= \int_1^e (x-1)\,dx - \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^e - \left(4 - 2\sqrt{e} \right) \\
&= \left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - 4 + 2\sqrt{e} \\
&= \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} - 4 + 2\sqrt{e} \\
&= \frac{e^2}{2} - e + 2\sqrt{e} - \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع :

U_1 :  و U_2 : 

1 . أ. لدينا $card(\Omega) = C_4^2 \cdot C_4^1 = 24$

ولدينا $card(E) = C_2^2 \cdot C_4^1 + C_2^2 \cdot C_4^1 = 8$ إذن $P(E) = \dfrac{card(E)}{card(\Omega)} = \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{3}$

ب . لدينا $card(F) = C_2^2 \cdot C_3^1 + C_2^2 \cdot C_3^1 = 6$ إذن $p(F) = \dfrac{card(F)}{card(\Omega)} = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$

ج . E : « الكرتان المسحوبتان من U_1 لهما نفس اللون » .

$\overline{F}$: « الحصول على ثلاث كرات من لونين مختلفين».

لدينا

$$p_E\left(\overline{F}\right) = \frac{p\left(E \cap \overline{F}\right)}{P(E)}$$

$E \cap \overline{F}$ « الكرتان المسحوبتان من U_1 لهما نفس اللون و الحصول على ثلاث كرات من لونين مختلفين» الحالتين هما:

(B B) من U_1 و **R** من U_2

(R R) من U_1 و**B** من U_2

إذن $card\left(E \cap \overline{F}\right) = C_2^2 \cdot C_1^1 + C_2^2 \cdot C_1^1 = 2$ و منه $p\left(E \cap \overline{F}\right) = \dfrac{card\left(E \cap \overline{F}\right)}{card(\Omega)} = \dfrac{2}{24} = \dfrac{1}{12}$

و منه فان
$$p_E\left(\overline{F}\right)=\frac{p\left(E\cap\overline{F}\right)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

2 . أ . $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

ب قانون احتما ل X:

$$p(X=0)=\frac{C_2^2\cdot C_3^1}{C_4^2\cdot C_4^1}=\frac{3}{24}$$
$$p(X=1)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1+C_2^2\cdot C_1^1}{C_4^2\cdot C_4^1}=\frac{9}{24}$$
$$p(X=2)=\frac{C_2^2\cdot C_1^1+C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}{C_4^2\cdot C_4^1}=\frac{9}{24}$$
$$p(X=3)=\frac{C_2^2\cdot C_3^1}{C_4^2\cdot C_4^1}=\frac{3}{24}$$

$p(X=X_i)$	0	1	2	3
$p(X=X_i)$	$\frac{3}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{3}{24}$