

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للدورة العادية 2006
شعبة العلوم الاقتصادية

التمرين الأول

(1) ليكن t عنصرا من $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ لدينا :

$$t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{(t^2 - t + 1)(1+t) - 1}{1+t} = \frac{t^2 - t + 1 + t^3 - t^2 + t - 1}{1+t} = \frac{t^3}{1+t}$$

وبالتالي فإن : $I = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t} dt = \int_0^1 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t) \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{5}{6} - \ln 2$$

(2) حساب $J = \int_0^1 t^2 \ln(1+t) dt$ باستعمال مكاملة بالأجزاء .

نضع $v'(t) = t^2$ و $u(t) = \ln(1+t)$

إذا : $v(t) = \frac{t^3}{3}$ و $u'(t) = \frac{1}{1+t}$

ومنه فإن : $J = \left[\frac{t^3}{3} \ln(1+t) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} \times \frac{1}{1+t} \right) dt$

$$= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} I = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18}$$

التمرين الثاني

(1) بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها q فإن $u_1 = u_0 q$ و $u_2 = u_0 q^2$ إذا :

$$u_0 + u_1 + u_2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2 + 2q + 2q^2 = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 + 2q - \frac{3}{2} = 0$$

نحصل إذا على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها q . وهي تقبل حلين $q_1 = -\frac{3}{2}$ و $q_2 = \frac{1}{2}$

وبما أن $q > 0$ فإن $q = \frac{1}{2}$.

(2) أ- لكل n من \mathbb{N} لدينا $v_n = \ln(u_n)$ إذا $v_0 = \ln(u_0) = \ln 2$. انبين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية

حسابية . لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$ (لأن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$) إذا :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{2} u_n\right) = \ln(u_n) + \ln \frac{1}{2} = v_n - \ln 2$$

وبالتالي فإن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 2$ وحدها الأول $v_0 = \ln 2$.

ب- لدينا : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}[v_0 + (v_0 + (n-1)r)]$

$$= \frac{n}{2}[\ln 2 + \ln 2 + (n-1)(-\ln 2)] = \frac{n}{2}(-n+3)\ln 2$$

$$S_n + 9\ln 2 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\frac{n}{2}(-n+3) + 9 \right] \ln 2 \leq 0 \quad \text{ج- لدينا}$$

$$(\ln 2 > 0) \Leftrightarrow -\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 3n + 18 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (6-n)(n+3) \leq 0$$

$$(n+3 > 0) \Leftrightarrow 6-n \leq 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 6$$

إذا أصغر عدد صحيح طبيعي يحقق الشرط المطلوب هو $n = 6$

التمرين الثالث

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ (لأن)} \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - 1 = -1 \quad (I)$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \text{ (لأن)} \right) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} - 1 = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \text{ (لأن)} \right) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$2) \text{ أ- لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا : } g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(1-x)$ إذا :

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad \text{و} \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad \text{و} \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

ويكون جدول تغيرات g على الشكل التالي :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	$-\infty$	$\frac{1}{e} - 1$	1

ب- لدينا $\frac{1}{e} - 1$ قيمة قصوى مطلقة للدالة g على \mathbb{R} إذا : $g(x) \leq \frac{1}{e} - 1$ لكل x من \mathbb{R}

وبما أن $\frac{1}{e} - 1 < 0$ فإن $g(x) < 0$ لكل x من \mathbb{R} .

(II) 1) أ- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ومنه فإن (C) يقبل مقاربا

أفقيا معادلته $y = 1$.

ب- بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty \text{ لأن } \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{g(x)}{x} \right]^2 = -\infty$$

نستنتج من النتيجة أن (C) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب .

$$(2) \text{ أ- لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا : } f'(x) = 2g(x) \times g'(x)$$

إذا إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g'(x)$ لأن $g(x) < 0$.

ب- جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	$\left(\frac{1}{e}-1\right)^2$	1

(3) أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الأفصول 0 هي :

$$y = -2x + 1 \text{ أي } y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

ب- التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

