التمرين الأول: (نقطتان)

1) المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية : $y''-6y'+9y=0$ هي $(1): r^2-6r+9=0$

و مميزها هو $\Delta=(-6)^2-4\times 9=0$.

إذن لها حل وحيد هو : $r_0=\frac{6}{2}=3$ ، وحلول المعادلة التفاضلية السابقة هي :

$y: x\mapsto (Ax+B)e^{3x} / (A,B)\in\mathbb{R}^2$. ن 0,75

2) أ- الدالة : $u: x\mapsto x^2e^{3x}$ قابلة للإشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}: \begin{cases} u'(x)=(3x^2+2x)e^{3x} \\ u''(x)=(9x^2+12x+2)e^{3x} \end{cases}$$

إذن : $u''(x)-6u'(x)+9u(x)=\left[9x^2+12x+2-6(3x^2+2x)+9x^2\right]e^{3x}$

أي أن : $u''(x)-6u'(x)+9u(x)=2e^{3x}$

و بالتالي فالدالة $u: x\mapsto x^2e^{3x}$ حل خاص للمعادلة التفاضلية : ن 0,75

$(E): y''-6y'+9y=2e^{3x}$.

ب- الحل العام للمعادلة (E) هو : $z: x\mapsto (x^2+Ax+B)e^{3x} / (A,B)\in\mathbb{R}^2$

ن 0,5

التمرين الثاني: (أربع نقط)

1) المميز المختصر للمعادلة $z^2-2\sqrt{3}(1+i)z+8i=0$ هو: $\Delta'=3(1+i)^2-8i=-2i$

إذن : $\Delta'=(1-i)^2$ ، وبالتالي فحلي المعادلة السابقة هما :

$z_1=(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)$ و $z_2=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)$. ن 0,75

2) أ- لدينا :

$$z_1^2=\left[(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}-1)\right]^2$$

$$=(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2+2i\left(\sqrt{3}^2-1^2\right)=4\sqrt{3}+4i=4(\sqrt{3}+i)$$

إذن : $z_1^2=4(\sqrt{3}+i)$

و $z_2=(\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)=i\left[(\sqrt{3}+1)-i(\sqrt{3}-1)\right]$

أي أن : $z_2=i\overline{z_1}$. (ن 1)

ب- لدينا : $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

إذن : $4(\sqrt{3}+i)=\left[8,\frac{\pi}{6}\right]$. (ن 0,25)

ج- لدينا : $z_1^2=4(\sqrt{3}+i)=\left[8,\frac{\pi}{6}\right]$ ، إذن : $z_1=\left[\sqrt{8},\frac{\pi}{12}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$

و $z_2=i\overline{z_1}=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{12}\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right]$

إذن : $z_2=\left[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{12}\right]$. (ن 1)

3) لدينا : $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\equiv\arg(z_2)-\arg(z_1)[2\pi]$

إذن : $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\equiv\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}[2\pi]$ أي أن : $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

و بما أن : $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}\equiv\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)[2\pi]$ فإن : $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

و لدينا : $|z_2|=|z_1|=2\sqrt{2}$ ، إذن : $OB=OA=2\sqrt{2}$

هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الأضلاع . (ن 1)

■ **التمرين الثالث:** (أربع نقط)

1) أ- تمثيل بارامتري للمستقيم (OA) في المعلم $(O,\overrightarrow{OA})$ هو : $\begin{cases} x = 0+1t \\ y = 0-1t \ / t \in \mathbb{R} \\ z = 0+3t \end{cases}$

إذن : $(OA):\begin{cases} x = t \\ y = -t \ / t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$. (0,5 ن)

ب- بما أن : $(Q)\perp(OA)$ فإن متجهة منظمة على (Q) هي $\overrightarrow{OA}$ ، إذن :

$$M(x,y,z)\in(Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OA}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)-(y+1)+3(z-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x-y+3z-11=0$$

إذن : $(Q): x-y+3z-11=0$ (0,75 ن)

ج) بما أن $\vec{n}(1,-1,3)$ متجهة منظمة على المستويين (P) و (Q) فإن : $(P)//(Q)$.
(0,25 ن)

2) أ- بما أن المستوى (Q) مماس للفلكة (S) في النقطة A فإن : $(\Omega A)\perp(Q)$

و لدينا : $(OA)\perp(Q)$ ، إذن : $(OA)//(\Omega A)$ أي أن : $(OA)=(\Omega A)$

و هذا يعني أن : $\Omega\in(OA)$.

و من جهة أخرى : $\Omega(a,b,c)\in(OA)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} / \begin{cases} a = t \\ b = -t \\ z = 3t \end{cases}$

إذن : $b=-a$ و $c=3a$. (0,75 ن)

ب- بما أن المستوى (Q) يقطع الفلكة (S) (التي مركزها Ω و شعاعها $r=\Omega A$)

وفق الدائرة Γ التي مركزها O و شعاعها $\sqrt{33}$ فإن : $OA^2+\Omega O^2=\Omega A^2$

إذن : $33+\Omega O^2=\Omega A^2$ (لأن $OA=\sqrt{33}$ ، $A\in\Gamma$)

ومنه فإن : $\Omega A^2-\Omega O^2=33$.

لدينا : $\Omega A^2-\Omega O^2=(a-1)^2+(b+1)^2+(c-3)^2-(a^2+b^2+c^2)$

ننشر فنحصل على : $\Omega A^2-\Omega O^2=-2a+1+2b+1-6c+9$

و بالتالي : $\Omega A^2-\Omega O^2=33\Leftrightarrow -2a+1+2b+1-6c+9=33$

أي : $2a-2b+6c+22=0$

إذن : $a-b+3c=-11$ (1,25 ن)

ج- إحداثيات النقطة Ω تحقق النظمة :

$\begin{cases} a-b+3c=-11 \\ b=-a \\ c=3a \end{cases}$ أي : $\begin{cases} 11a=-11 \\ b=-a \\ c=3a \end{cases}$

و بالتالي : $\Omega(-1,1,-3)$. (0,5 ن)

■ **مسألة:** (10 نقط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\ln(1+x)-x$.

1) أ- لدينا : $\forall x\in[0,+\infty[: g'(x)=(-x)'+(\ln(1+x))'$

$$=-1+\frac{(1+x)'}{1+x}$$
$$=-1+\frac{1}{1+x}$$
$$=\frac{-x}{x+1}$$

و بما أن : $g'(x)\prec 0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ فإن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$. (0,75 ن)

ب- بما أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ فإن :

$\forall x\in[0,+\infty[: g(x)\le g(0)$ و $g(0)=\ln 1=0$

إذن : $\forall x\in[0,+\infty[: g(x)\le 0$.

(0,25 ن)

2) الدالة g تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ إذن : $\forall x\in]0,+\infty[: g(x)\prec g(0)$

أي أن : $\forall x\in]0,+\infty[: g(x)\prec 0$

و $g(x)\prec 0 \Leftrightarrow \ln(1+x)\prec x$.

و من جهة أخرى : $\forall x\in]0,+\infty[:1+x\succ 1$ ، إذن : $\ln(1+x)\succ \ln 1=0$

لأن الدالة ln تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

و بالتالي : $\forall x\in]0,+\infty[:0\prec \ln(1+x)\prec x$. (0,5 ن)

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

1) ليكن D حيز تعريف الدالة f ، لدينا :

$$x\in D\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\ \dfrac{x+1}{x-1}\succ 0\end{cases}\Leftrightarrow (x+1)(x-1)\succ 0\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

و منه فإن : $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. (0,5 ن)

2) أ- حيز تعريف الدالة f متماثل بالنسبة ل 0 و لدينا :

$$\forall x\in D: f(-x)=-x+\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=-x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و بما أن : $\forall x\in D:\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=-\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

فإن $\forall x\in D: f(-x)=-f(x)$.

f إذن دالة فردية . (0,5 ن)

ب- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\ln 1=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

و من جهة أخرى : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2}{x-1}=+\infty$ إذن : $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$

و منه فإن : $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1+\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$. (0,5 ن)

3) أ- لدينا :

$$\forall x\in D: f'(x)=(x)'+\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=1+\frac{\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x+1}$$

أي أن : $f'(x)=1-\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

و بالتالي : $\forall x\in D: f'(x)=\dfrac{x^2-1-2}{x^2-1}=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$. (0,75 ن)

ب- لدينا : $\forall x\in D: f'(x)=\dfrac{(x+\sqrt3)(x-\sqrt3)}{x^2-1}$ ،

إذن : $\forall x\in]1,+\infty[: sg[f'(x)]=sg[x-\sqrt3]$ ، و بالتالي فالدالة f تزايدية

قطعا على المجال $[\sqrt3,+\infty[$ و تناقصية قطعا على المجال $]1,\sqrt3]$. (0,5 ن)

4) أ- لدينا : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\ln 1=0$.

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C) . (0,25 ن)

ب- بما أن : $\dfrac{x+1}{x-1}-1=\dfrac{2}{x-1}$ ، $\forall x\in D$: فإن :

$\forall x\in]1,+\infty[:\dfrac{x+1}{x-1}\succ 1$ و $\forall x\in]-\infty,-1[:\dfrac{x+1}{x-1}\prec 1$ ، إذن :

$\forall x\in]1,+\infty[:\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\succ \ln 1=0$ و $\forall x\in]-\infty,-1[:\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\prec \ln 1=0$

(0,5 ن)

ج- نستنتج من السؤال السابق أن :

$\forall x \in]1,+\infty[: f(x) \succ x$ و $\forall x \in]-\infty,-1[: f(x) \prec x$

إذن على المجال $]-\infty,-1[$ المنحنى (C) تحت مقاربه (Δ) و على المجال $]1,+\infty[$

المنحنى (C) فوق (Δ) . (0,25 ن)

6) أ- نضع : $\begin{cases} u(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ ، إذن : $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{-2}{x^2-1} \\ v(x) = x \end{cases}$

و بالتالي : $\int_2^4 \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)dx = \left[x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^4 + \int_2^4 \dfrac{2x}{x^2-1}dx$

$= \left[x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + \ln\left(x^2-1\right)\right]_2^4$ (1,25 ن)

أي أن : $\int_2^4 \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)dx = 4\ln\left(\dfrac{5}{3}\right) + \ln(15) - 3\ln(3) = 5\ln 5 - 6\ln 3$.

ب- مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمات $x=2$ و $x=4$ و $y=x$

هي : $\int_2^4 [f(x) - x]dx = \int_2^4 \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)dx = (5\ln 5 - 6\ln 3)cm^2$. (0,5 ن)

III- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ بحيث : $\forall n \geq 2 : u_n = f(n) - n$.

1) أ- لدينا : $\forall n \geq 2 : u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$ و $\dfrac{n+1}{n-1} = \dfrac{n-1+2}{n-1} = 1 + \dfrac{2}{n-1}$

إذن : $\forall n \geq 2 : u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n-1}\right)$. (0,25 ن)

ب- لدينا : $\forall n \geq 2 : \dfrac{2}{n-1} \succ \dfrac{2}{n}$ أي أن : $\forall n \geq 2 : \dfrac{2}{n-1} \succ \dfrac{2}{n+1-1}$

إذن : $1 + \dfrac{2}{n-1} \succ 1 + \dfrac{2}{n+1-1}$ ، ومنه $\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right) \succ \ln\left(1+\dfrac{2}{n+1-1}\right)$

هذا يعني أن : $\forall n \geq 2 : u_n \succ u_{n+1}$ ، إذن $(u_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا . (0,75 ن)

2) أ- حسب نتيجة السؤال I) 2) نستنتج أن :

$\forall n \geq 2 : 0 \prec \ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right) \prec \dfrac{2}{n-1}$ (يكفي أن نأخذ $x = \dfrac{2}{n-1}$)

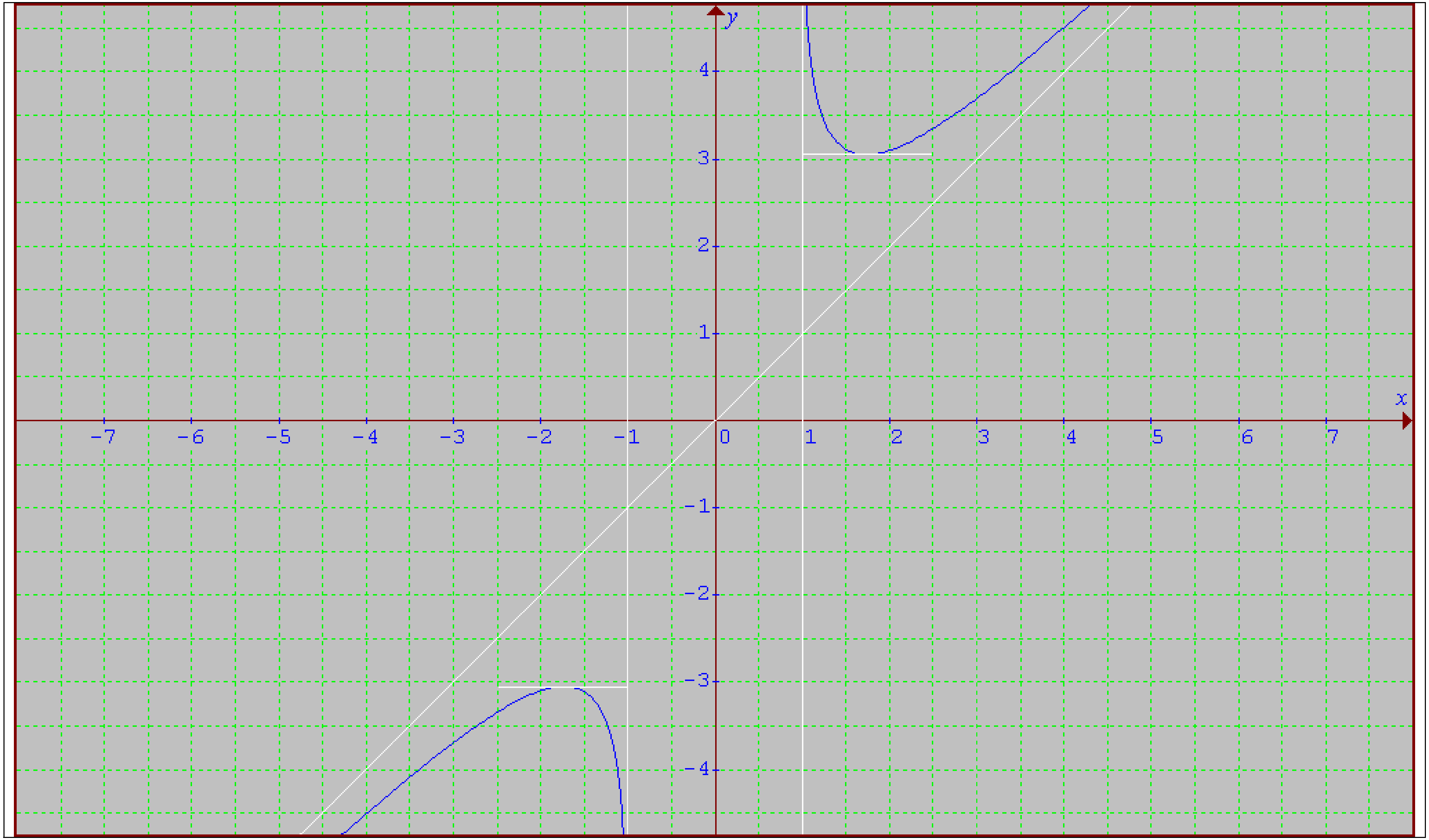
إذن : $\forall n \geq 2 : 0 \prec u_n \prec \dfrac{2}{n-1}$. (0,5 ن)

ب- المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تناقصية و مصغورة إذن فهي متقاربة ، وبما أن :

$\forall n \geq 2 : 0 \prec u_n \prec \dfrac{2}{n-1}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n-1} = 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(0,5 ن)

5) إنشاء المنحنى (C) : (1 ن)



y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7