الأستاذ : علي الشريف
cherifalix@yahoo.fr
نيابة الخميسات

تصحيح الامتحان الوطني لمادة الرياضيات
دورة يونيو 2006

شعبة العلو م الرياضية (أ و ب)
www.madariss.fr

التمرين الأول :

نعتبر : $G=\left\{ M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}1&0\\a&b\end{pmatrix} \ / \ (a,b)\in IR\times IR^*\right\}$

I) – 1) نبين أن G جزء مستقر في $(M_2(IR),\times)$.

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من G لدينا :

$$M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}=\begin{pmatrix}1&0\\a&b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\a+bc&bd\end{pmatrix}$$

بما أن : $(a+bc,bd)\in IR\times IR^*$ فإن : $M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}\in G$

و بالتالي : G جزء مستقر في $(M_2(IR),\times)$.

2) لنبين أن $(G,\times)$ زمرة :

لدينا : $G\neq\phi$ لأن $I\in G$ و لدينا G جزء مستقر في $(M_2(IR),\times)$ ❶.

و من جهة أخرى لدينا : $M^{-1}_{(a,b)}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{a}{b}&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$ مع $(-\frac{a}{b},\frac{1}{b})\in IR\times IR^*$

إذن : $M^{-1}_{(a,b)}\in G$ ❷. و بما أن $\times$ تجميعي في $M_2(IR)$ فإنه تجميعي أيضا في G ❸. نستنتج من ❶ و ❷ و ❸ أن $(G,\times)$ زمرة .

* دراسة تبادلية الزمرة :

نعتبر في G المصفوفتين : $\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}$

لدينا : $\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\11&20\end{pmatrix}$

و $\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\17&20\end{pmatrix}$

و منه : $\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\3&4\end{pmatrix}$

نستنتج إذن أ ن $(G,\times)$ زمرة غير تبادلية .

3) نعتبر : $H=\left\{M_{(a,b)}\in G/(a,b)\in IR\times IR^*_+\right\}$

لنبين أ ن: H زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$. لدينا $H\neq\phi$ لأن $I\in H$

ليكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ عنصرين من H لدينا :

$$M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}=\begin{pmatrix}1&0\\a&b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\a+bc&bd\end{pmatrix}$$

بما أن : $(a,b)\in IR\times IR^*_+$ و $(c,d)\in IR\times IR^*_+$.

فإن : $(a+bc,bd)\in IR\times IR^*_+$ إذن : $M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}\in H$

و من جهة أخرى لدينا : $M^{-1}_{(a,b)}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{a}{b}&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$ مع $(a,b)\in IR\times IR^*_+$

و بما أن : $(-\frac{a}{b},\frac{1}{b})\in IR\times IR^*_+$ فإن : $M^{-1}_{(a,b)}\in H$

الأستاذ : علي الشريف
cherifalix@yahoo.fr
نيابة الخميسات

تصحيح الامتحان الوطني لمادة الرياضيات
دورة يونيو 2006

شعبة العلو م الرياضية (أ و ب)
www.madariss.fr

و بالتالي فإن : H زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

ملاحظة : من أ جل ربح الوقت أستعمل السؤال 1 و 2 دون إعادة حساب جداء المصفوفتين و المقلوب مرة ثانية فقط تغيير شروط المجموعة G بشروط المجموعة H

4) حساب A^n بدلالة a و n . حيث $A=\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}$ $(a\in IR)$.

لدينا : $A^1=A$ و $A^2=A\times A=\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2a&1\end{pmatrix}$

لنبين إذن بالترجع أن : $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\na&1\end{pmatrix}$.

العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$.

نفترض أن العبارة صحيحة من أ جل n من IN^* يعني : $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\na&1\end{pmatrix}$.

لدينا : $A^{n+1}=A^n\times A=\begin{pmatrix}1&0\\na&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\(n+1)a&1\end{pmatrix}$

و بالتالي : $(\forall n\in IN^*)\ : A^n=\begin{pmatrix}1&0\\na&1\end{pmatrix}$

II) نعتبر في $IR\times IR^*$ قانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي :

لكل (a,b) و (x,y) من $IR\times IR^*$: $(a,b)T(x,y)=(a+bx,by)$

ليكن φ التطبيق المعرف من G نحو $IR\times IR^*$ بما يلي :

$$(\forall(a,b)\in IR\times IR^*)\ :\ \varphi(M_{(a,b)})=(a,b)$$

1) لنبين أن φ تشاكل تقابلي من G نحو $IR\times IR^*$:

❶ φ تطبيق تقابلي G نحو $IR\times IR^*$:

- φ تطبيق حسب تعريفه .
- φ تبايني : نعتبر $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ من G

لدينا : $\varphi(M_{(a,b)})=\varphi(M_{(c,d)}) \Rightarrow (a,b)=(c,d) \Rightarrow \begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}$

$\Rightarrow\ M_{(a,b)}=M_{(c,d)}$ إذن φ تبايني .

- φ شمولي : نعتبر $(a,b)\in IR\times IR^*$ لدينا : $\varphi(M_{(a,b)})=(a,b)$

إذن φ شمولي .

و بالتالي φ تطبيق تقابلي G نحو $IR\times IR^*$.

❷ φ تشاكل : نعتبر $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ من G .

لدينا : $\varphi(M_{(a,b)}\times M_{(c,d)})=\varphi(M_{(a+bc,bd)})$

لأن : $M_{(a,b)}\times M_{(c,d)}=\begin{pmatrix}1&0\\a&b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\a+bc&bd\end{pmatrix}$

و لدينا : $\varphi(M_{(a+bc,bd)})=(a+bc,bd)$

و من جهة أخرى : $(a+bc,bd)=(a,b)T(c,d)=\varphi(M_{(a,b)})T\,\varphi(M_{(c,d)})$

و بالتالي : $\varphi(M_{(a,b)}\times M_{(c,d)})=\varphi(M_{(a,b)})T\,\varphi(M_{(c,d)})$ إذن φ تشاكل .

من ❶ و ❷ نستنتج أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(IR\times IR^*,T)$.

2) بما أن $(G,\times)$ زمرة و φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(IR\times IR^*,T)$.
فإن $(IR\times IR^*,T)$ زمرة .

3) مماثل $\underbrace{(a,1)T(a,1)T......T(a,1)}_{n\text{مرة}}$ في $(IR\times IR^*,T)$

لدينا : $\varphi(A)=(a,1)$

إذن : $\underbrace{(a,1)T(a,1)T......T(a,1)}_{n\ \text{مرة}}=\underbrace{\varphi(A)T\varphi(A)T......T\varphi(A)}_{n\ \text{مرة}}=\varphi(A^n)$

إذن صورة A^n في $(G,\times)$ هي مماثل $\underbrace{(a,1)T(a,1)T......T(a,1)}_{n\ \text{مرة}}$.

يكفي أن نحدد مماثل A^n في $(G,\times)$ حيث $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\na&1\end{pmatrix}$

لدينا : $(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-na&1\end{pmatrix}$ (نستعمل I_2 لدينا $M^{-1}_{(a,b)}=\begin{pmatrix}1&0\\-\frac{a}{b}&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$)

و بالتالي مماثل $\underbrace{(a,1)T(a,1)T......T(a,1)}_{n\ \text{مرة}}$ حيث. $n\in IN^*-\{1\}$.

هو : $\varphi((A^n)^{-1})=\varphi(M_{(-na,1)})=(-na,1)$

ا لتمرين الثاني :

نعتبر في $IN^*\times IN^*$ المعادلة : $(E):\ x^2(x+y)=y^2(x-y)^2$

1) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E). نضع $x\wedge y=d$ و $x=ad$ و $y=bd$

أ - بتعويض $x=ad$ و $y=bd$ في المعادلة (E)

نجد : $a^2d^2(a+b)d=b^2d^2(a-b)^2d^2$ و منه : $a^2(a+b)=b^2(a-b)^2d$ *

ب – نستنتج حسب أ – أن : $b/a^2(a+b)$ و بما أن : $\left(a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge b^2=1\right)$

فإن : $b/(a+b)$ و لدينا : b/b إذن : $b/(a+b)-b$ يعني : b/a

و بما أن : $a\wedge b=1$ و $(a,b)\in IN^*\times IN^*$ فإن : $b=1$.

ج - نفترض أن : $a=1$ بما أن : $b=1$ فإنه حسب * : $a^2(a+b)=0$

و هذا غير ممكن لأن $(a,b)\in IN^*\times IN^*$.

بما أن $b=1$ فإن العلاقة * تصبح : $d(a-1)^2=(a+1)a$

إذن : $(a-1)/(a+1)a$ و بما أن a و $a-1$ عددين متتابعين فإنهما أوليان فيما بينهما .

إذن : $(a-1)/(a+1)$.

د - لدينا : $a-1=(a+1)-2$ و $(a-1)/(a+1)$ إذن : $a-1/2$

و بما أن : $a\in IN^*$ فإن : $a-1=2$ أو $a-1=1$

و بالتالي : $a=2$ أو $a=3$.

2) حسب ما سبق لدينا : ($b=1$ و $a=2$) أو ($b=1$ و $a=3$)

الحالة الأولى : ($b=1$ و $a=2$) من خلا ل العلاقة * نستنتج أن : $d=12$

إذن : $(x,y)=(12\times2,12\times1)=(24,12)$

الحالة الثانية : ($b=1$ و $a=3$) من خلا ل العلاقة * نستنتج أن : $d=9$.

إذن : $(x,y)=(9\times3,9\times1)=(27,9)$

و بالتالي حلول المعادلة (E) : هي : $\{(24,12),(27,9)\}$.

ا لتمرين الثالث :

لكل عدد z عقدي من C نضع : $P(z)=z^2-(2+6i)z$

I) 1) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

نعتبر (H) مجموعة النقط ذات اللحق z التي من أجلها يكون $P(z)$ تخليا صرفا .

لنبين أن $x^2-y^2-2x+6y=0$ هي معادلة ديكارتية للمجموعة (H).

نضع : $z=x+yi$ حيث : $Re(z)=x$ و $Im(z)=y$.

$P(z)$ تخليا صرفا $\Leftrightarrow$ $P(z)=-\overline{P(z)}$ $\Leftrightarrow$ $P(z)=-P(\overline{z})$

يعني : $(x+iy)^2-(2+6i)(x+iy)=-(x-iy)^2+(2-6i)(x-iy)$

و منه : $x^2-y^2-2x+6y=0$ معادلة ديكارتية للمجموعة (H) .

2) طبيعة (H)

لدينا : $x^2-y^2-2x+6y=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-(y-3)^2=-8$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{y-3}{2\sqrt{2}}\right)^2=-1$$

إذاوضعنا : $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-3 \end{cases}$ فإن معادلة (H) تكتب في المعلم $(\Omega,\vec{e_1},\vec{e_2})$

حيث $\Omega(1,3)$ على شكل : $\frac{X^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=-1$.

و بالتالي فإن (H) هذلول (H) مركزه $\Omega(1,3)$.

العناصر المميزة في المعلم $(\Omega,\vec{e_1},\vec{e_2})$:

الرأسان هما : $A(0,2\sqrt{2})$ و $A(0,-2\sqrt{2})$.

المقاربان : $(\Delta_1):Y=X$ و $(\Delta_2):Y=-X$

العناصر المميزة في المعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$:

لدينا بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{e_1},\vec{e_2})$: $A(0,2\sqrt{2})$ و $A(0,-2\sqrt{2})$

بآستعمال النظمة : $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-3 \end{cases}$ نجد : $\begin{cases} 0=x-1 \\ 2\sqrt{2}=y-3 \end{cases}$ و $\begin{cases} 0=x-1 \\ -2\sqrt{2}=y-3 \end{cases}$

و منه بالنسبة للمعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ لدينا : $A(1,2\sqrt{2}+3)$ و $A'(1,3-2\sqrt{2})$

لدينا بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{e_1},\vec{e_2})$: $(\Delta_1):Y=X$ و $(\Delta_2):Y=-X$

بآستعمال نفس النظمة نجد : $\begin{cases} y-3=x-1 \\ y-3=-(x-1) \end{cases}$

يعني : $(\Delta_1):y=x+2$ و $(\Delta_2):y=-x+4$.

و بالتالي بالنسبة للمعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

لدينا مركز (H) هو $\Omega(1,3)$.

الرأسان هما : $A(1,2\sqrt{2}+3)$ و $A'(1,3-2\sqrt{2})$.

معادلتي المقاربين هما : $(\Delta_1):y=x+2$ و $(\Delta_2):y=-x+4$.

3) النقطة $O(0,0)$ تحقق معادلة (H) إذن فهي تنتمي إلى (H) .

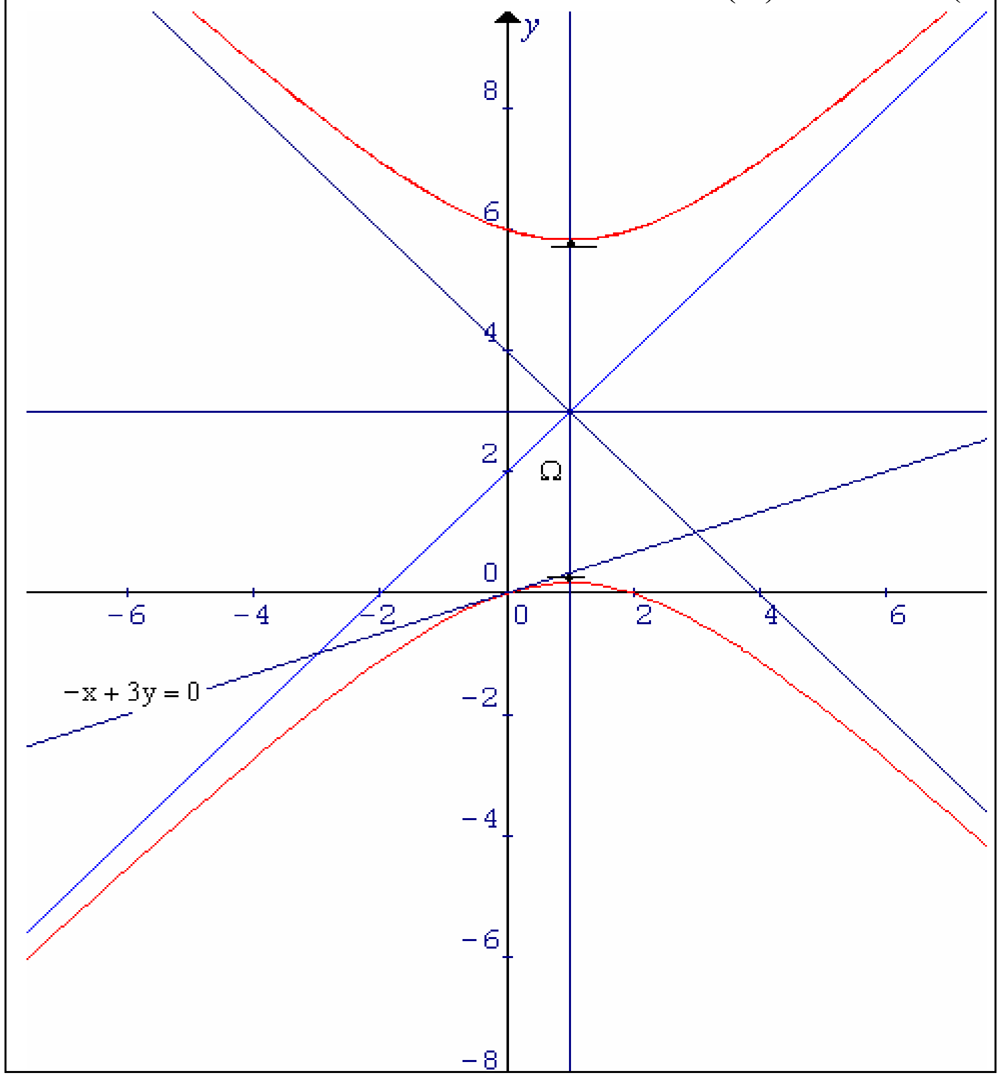
معادلة مماس للمنحنى عند O بالنسبة للمعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

لدينا معادلة (H) بالنسبة ل $(\Omega,\vec{e_1},\vec{e_2})$: $\frac{X^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}=-1$

لدينا إحداثيتي النقطة O بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{e_1},\vec{e_2})$ هما : $O(-1,-3)$ و ذلك بالرجو ع إلى النظمة . إذن معادلة المماس ل (H) عند $O(-1,-3)$ بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{e_1},\vec{e_2})$

هي : $\frac{XX_0}{8}-\frac{YY_0}{8}=-1$ يعني : $-\frac{X}{8}+\frac{3Y}{8}=-1$ لتحويل هذه المعادلة إلى المعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ نستعمل النظمة $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-3 \end{cases}$ فنحصل على معادلة المماس ل (H) عند O بالنسبة للمعلم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$: $-x+3y=0$.

4) إنشاء المنحنى (H):



II) 1) حل المعادلة : $P(z)=4-6i$.

لدينا : $$P(z)=4-6i \Leftrightarrow z^2-(2+6i)z-4+6i=0$$

$$\Delta'=(1+3i)^2+4-6i=-4=(2.i)^2$$

إذن المعادلة تقبل حلين في C : $z_1=1+(3+2)i=1+5i$ و $z_2=1+i$

2) أ - لدينا :

$$u^4\times v=(1+5i)^4(1+i)=(476-480i)(1+i)$$
$$=956-4i=4(239-i)=4w$$

ب) عمدة u :

لدينا

$$u=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+i\right)=\frac{1}{5}\left(\tan(\alpha)+i\right)=\frac{1}{5\cos(\alpha)}\left(\sin(\alpha)+i\cos(\alpha)\right)$$
$$=\frac{1}{5\cos(\alpha)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$$

بما أن : $$\alpha=\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{5}\right)\Rightarrow 0\prec\alpha\prec\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos(\alpha)\succ 0$$

فإن : $$\arg(u)=\frac{\pi}{2}-\alpha\,[2\pi]$$

عمدة w :

لدينا بالمثل: $$w=239\left(1-\frac{1}{239}i\right)=\frac{239}{\cos(\beta)}\left(\cos(-\beta)+i\sin(-\beta)\right)$$

بما أن : $$\beta=\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{239}\right)\Rightarrow 0\prec\alpha\prec\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos(\beta)\succ 0 .$$

فإن : $\arg(w) = -\beta[2\pi]$

ج) لدينا : $u^4 \times v = 4w$ و منه : $\text{Arg}(u^4 \times v) \equiv \text{Arg}(4w)[2\pi]$

يعني : $4\text{Arg}(u) + \text{Arg}(v) \equiv \text{Arg}(4) + \text{Arg}(w)[2\pi]$

يعني : $4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{\pi}{4} \equiv 0 - \beta[2\pi]$ يعني : $4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

و منه $(\exists k \in Z)/4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

و لدينا من جهة أخرى : $\left.\begin{array}{l} 0 \prec \frac{1}{5} \prec 1 \Rightarrow 0 \prec \alpha \prec \frac{\pi}{4} \\ 0 \prec \frac{1}{239} \prec 1 \Rightarrow 0 \prec \beta \prec \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \prec 4\alpha - \beta \prec \pi$

و منه : $\left(-\frac{\pi}{4} \prec \frac{\pi}{4} + 2k\pi \prec \pi\right) \Rightarrow (k = 0)$

و بالتالي : $\left(4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 4\text{Arc}\tan\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arc}\tan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

التمرين الرابع :

الجزء الأول : نعتبر الدالة g_n المعرفة على IR_+^* بما يلي : $g_n(x) = nx + 2\ln(x)$

1) الدالة g_n قابلة للإشتقاق على IR_+^* و لدينا : $g_n'(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx+2}{x}$.

بما أن : $\forall x \in IR_+^* : \frac{nx+2}{x} \succ 0$

و لدينا : $\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to 0^+} g_n(x) = -\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g_n .

x	0		$+\infty$
g_n'	‖	$+$	
g_n	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2) لنبين أن : $\forall x \in IR_+^* : \sqrt{x} \succ \ln(x)$

نعتبر الدالة h المعرفة على IR_+^* بما يلي : $h(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$

الدالة h قابلة للإشتقاق على IR_+^*

بحيث : $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{x^2 - 4x}{2x\sqrt{x}\left(x + 2\sqrt{x}\right)}$

و منه : $h'(x) = \frac{x(x-4)}{2x\sqrt{x}\left(x + 2\sqrt{x}\right)}$

و لدينا من جهة أخرى : $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة h .

x	0		4		$+\infty$
h'	‖	$-$	0	$+$	
h	‖ $+\infty$	↘	$2-2\ln(2)$	↗	$+\infty$

بمأن : $2 - 2\ln(2) \succ 0$ فغنه من خلال الجدول نستنتج أن : $\forall x \in IR_+^* : h(x) \succ 0$

و هذا يكافئ أن : $\forall x \in IR_+^* : \sqrt{x} \succ \ln(x)$

3) أ - لدينا الدالة g_n متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{1}{n},\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ ❶.

و لدينا : $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + 2\ln\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - 2\ln(n)$

بما أن : $n \geq 3 \Rightarrow \ln(n) \geq \ln(3) \geq 1 \Rightarrow 1 - 2\ln(n) \leq 1 - 2\ln(3) \leq -1 \leq 0$

فإن : $g_n\left(\frac{1}{n}\right) \prec 0$.

و لدينا : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n}{\sqrt{n}} + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} - 2\ln\left(\sqrt{n}\right)$

و حسب 2) نستنتج أن : $\sqrt{n} \succ 2\ln\left(\sqrt{n}\right)$ و منه : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \succ 0$.

إذن : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times g_n\left(\frac{1}{n}\right) \prec 0$ ❷

من ❶ و ❷ نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطة أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حل وحيد α_n بحيث $\frac{1}{n} \prec \alpha_n \prec \frac{1}{\sqrt{n}}$.

ب – بما أن : $\frac{1}{n} \prec \alpha_n \prec \frac{1}{\sqrt{n}}$ لكل $n \geq 3$.

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha_n = 0$.

الجزء الثاني :

I) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x}.e^{-x}$

1) اشتقاق الدالة f عند 0^+ :

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt[3]{x}.e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$

نستنتج أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 0^+ و منحناها (C) يقبل نصف مماس عمودي عند موجه نحو الاعلى .

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{e^x} = 0$ و منه المنحنى (C) يقبل محور الافاصيل مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

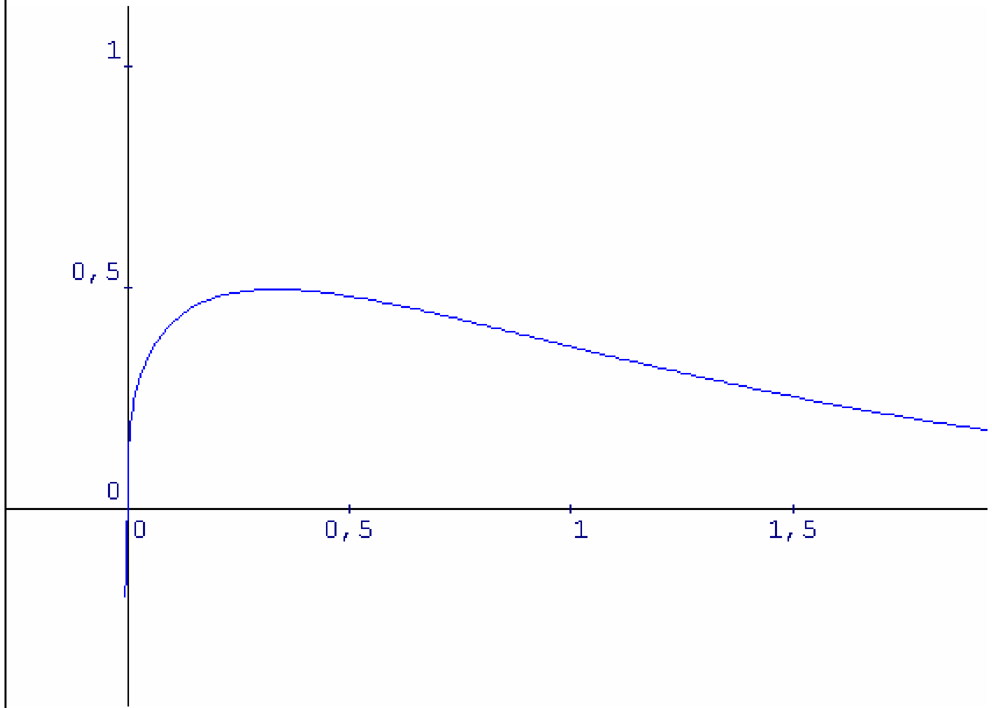
3) أ - الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

بحيث : $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}.e^{-x}\right)' = \left(\frac{1}{3x} - 1\right)x^{\frac{1}{3}}e^{-x} = \left(\frac{1-3x}{3x}\right)f(x)$

ب- من خلال المشقة نستنتج :

x	0		1/3		$+\infty$
f'	‖	+	0	−	
f	0	↗	0,5	↘	0

4) المنحنى (C) :



1) أ - لنبين أن : $f(I)\subset I$.

لدينا : $f\left(\frac{1}{3}\right)\approx 0.5\in I$ و $f(1)=\frac{1}{e}\in I$ $\quad (1\prec e\prec 3)$.

و بما أن الدالة f تناقصية قطعا على المجال I و متصلة.

فإن : $f(I)=\left[f(1),f\left(\frac{1}{3}\right)\right]\subset\left[\frac{1}{3},1\right]$

ب- لنبين أن : $(\forall x\in I):|f'(x)|\le\frac{2}{3}$.

لدينا حسب $(*)$ $\quad (\forall x\in]0,+\infty[):\ f'(x)=\left(\frac{1-3x}{3x}\right).f(x)$

و بما أن : $I\subset]0,+\infty[$ فإن : $(\forall x\in I):\ f'(x)=\left(\frac{1-3x}{3x}\right).f(x)$.

و لدينا : $\frac{1}{3}\le x\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{1-3x}{3x}\right|\le\frac{2}{3}$ و $(\forall x\in I):|f(x)|\le 1$ لأن $f(I)\subset I$

و منه نستنتج أن : $(\forall x\in I):|f'(x)|\le\frac{2}{3}$

ج - لنبين أن : $x=\alpha_3\Leftrightarrow(x\succ 0$ و $f(x)=x)$ حيث α_3 هوحل المعادلة
$g_3(x)=0$

لدينا : $(x\succ 0$ و $f(x)=x)\Leftrightarrow\sqrt[3]{x}.e^{-x}=x\Leftrightarrow x.e^{-3x}=x^3$

و منه : $2\ln(x)+3x=0$ يعني : $g_3(x)=0$ و هذا يكافئ أن : $x=\alpha_3$

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases}u_0=\frac{1}{3}\\(\forall n\in\mathbb{N}):u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

أ – لنبين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):u_n\in I$.

لدينا : $u_0\in I$.

الأستاذ : علي الشريف
cherifalix@yahoo.fr
نيابة الخميسات

نفترض أن : $u_n \in I$.

بما أن : $f(I) \subset I$ فإن : $f(u_n) \subset I$ و منه: $u_{n+1} \in I$.

و بالتالي : $(\forall n \in IN) : u_n \in I$

ب - لنبين أن : $(\forall n \in IN) : |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$

لكل n من IN لدينا f قابلة للإشتقاق على المجال : $[\inf(u_n, \alpha_3); \sup(u_n, \alpha_3)]$

حسب مبرهنة التزايدية المنتهية :

$$(\forall n \in IN) : \exists c_n \in]\inf(u_n, \alpha_3); \sup(u_n, \alpha_3)[\quad /$$
$$f(u_n) - f(\alpha_3) = f'(c_n)(u_n - \alpha_3)$$

و هذا يكافئ أن : $(\forall n \in IN) : \exists c_n \in]\inf(u_n, \alpha_3); \sup(u_n, \alpha_3)[\quad /$

$$|f(u_n) - f(\alpha_3)| = |f'(c_n)| \times |(u_n - \alpha_3)|$$

و بما أن : $(\forall n \in IN)]\inf(u_n, \alpha_3); \sup(u_n, \alpha_3)[\subset I$

فإن : $(\forall n \in IN) : c_n \in I$ و لدينا كذلك مماسبق : $(\forall x \in I) : |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

و منه: $(\forall n \in IN) : |f'(c_n)| \leq \frac{2}{3}$

نستنتج أن : $(\forall n \in IN) \quad |f(u_n) - f(\alpha_3)| \leq \frac{2}{3} \times |(u_n - \alpha_3)|$

و بالتالي : $(\forall n \in IN) : |u_{n+1} - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha_3|$.

ج - لدينا :

$$\begin{cases} |u_1 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_0 - \alpha_3| \\ |u_2 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_1 - \alpha_3| \\ |u_3 - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_2 - \alpha_3| \\ . \\ . \\ |u_n - \alpha_3| \leq \frac{2}{3}|u_{n-1} - \alpha_3| \end{cases}$$

بضرب المتفاوتات طرفا طرف نحصل على : $|u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha_3|$

و بما أن : $u_0 = \frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3} \prec \alpha_3 \prec \frac{1}{\sqrt{3}}$ فإن : $-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \prec u_0 - \alpha_3 \prec 0$

و هذ ا يعني أ ن : $|u_0 - \alpha_3| \prec \frac{2}{3}$

و بالتالي : $(\forall n \in IN) : |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

يمكن كذلك أ ن نبرهن على هذا السؤال بالترجع .

د - من النتفاوتة : $(\forall n \in IN) : |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

نستنتج أ ن : $\lim\limits_{x \to +\infty} |u_n - \alpha_3| = 0$ و هذ ا يكافئ أ ن : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \alpha_3$

و بالتالي المتتالية (u_n) متقاربة و تقبل النهاية α_3 .

الأستاذ : علي الشريف
cherifalix@yahoo.fr
نيابة الخميسات

تصحيح الامتحان الوطني لمادة الرياضيات
دورة يونيو 2006

شعبة العلو م الرياضية (أ و ب)
www.madariss.fr

III) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{8x} f(t).dt$

1) أ – لدينا الدالة $t\to f(t)$ متصلة على المجال $[0,+\infty[$ إذن فهي تقبل دالة أصلية F_0 إذن لكل x من $[0,+\infty[$ لدينا $F(x)=\int_x^{8x} f(t).dt = F_0(8x)-F_0(x)$

الدالة $x\to F_0(x)$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.

الدالة $x\to 8x$ $F_0(x)$ قابلة للإشتقاق على المجال IR إذن الدالة $x\to F_0(8x)$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

و بالتالي الدالة $x\to F_0(8x)-F_0(x)$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.

ب – تغيرات الدالة F :

لدينا : $$F(x)=\left[F_0(x)\right]_x^{8x}=F_0(8x)-F_0(x)$$

حيث F_0 دالة أصلية للدالة f .

إذ ن : $$F'(x)=\left(F_0(8x)\right)'-F_0'(x)=8f(8x)-f(x)$$
$$=8\sqrt[3]{8x}.e^{-8x}-\sqrt[3]{x}.e^{-x}=\sqrt[3]{x}.e^{-x}(16.e^{-7x}-1)$$

إذ ن إشارة F' هي إشارة $(16.e^{-7x}-1)$.

لدينا : $16e^{-7x}-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{7}\ln(2)$.

لدينا : $$\forall x\in\left[\frac{4}{7}\ln(2),+\infty\right[: 16e^{-7x}-1\le 0$$

و $$\forall x\in\left[0,\frac{4}{7}\ln(2)\right] : 16e^{-7x}-1\ge 0$$

نستنتج إذن أن : الدالة F تناقصية قطعا على المجال $\left[\frac{4}{7}\ln(2),+\infty\right[$ و

تزايدية قطعا على المجال $\left[0,\frac{4}{7}\ln(2)\right]$.

2) أ – انبين أ ن :

$$\left(\forall x\in IR^+\right) : 0\le F(x)\le 2f(x)(1-e^{-7x})$$

نعتبر $x\in IR^+$:

لدينا : $0\le x\le t\le 8x$ تكافئ : $0\le\sqrt[3]{t}\le\sqrt[3]{8x}$

تكافئ : $$0\le\sqrt[3]{t}.e^{-t}\le\sqrt[3]{8x}.e^{-t}$$

تكافئ : $$0\le\int_x^{8x}\sqrt[3]{t}.e^{-t}.dt\le\int_x^{8x}\sqrt[3]{8x}.e^{-t}.dt$$

تكافئ : $$0\le\int_x^{8x}\sqrt[3]{t}.e^{-t}.dt\le\sqrt[3]{8x}.\int_x^{8x}e^{-t}.dt$$

الأستاذ : علي الشريف
cherifalix@yahoo.fr
نيابة الخميسات

تصحيح الامتحان الوطني لمادة الرياضيات
دورة يونيو 2006

شعبة العلو م الرياضية (أ و ب)
www.madariss.fr

تكافئ : $0 \leq F(x) \leq 2\sqrt[3]{x}.(-e^{-8x} + e^{-x})$

تكافئ : $0 \leq F(x) \leq 2\sqrt[3]{x}.e^{-x}(1 - e^{-7x})$

و بالتالي : $(\forall x \in IR^{+}) : 0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$ *

ب - لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) = 0$

و حسب المتفاوتة * نستنتج أ ن : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

ج – جدول تغيرات الدالة F .

x	0		$/7\ln(2)$		$+\infty$
F'		+	0	—	
F	0	$\nearrow$	$F(\frac{4}{7}\ln(2))$	$\searrow$	0