



التمرين الأول :

1. لدينا $f(x) = 2x^2 + x - 2$ إذن $f'(x) = 4x + 1$ و $f''(x) = 4$

$$\begin{aligned} f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) &= 4 - 3(4x + 1) + 2(2x^2 + x - 2) \\ &= 4 - 12x - 3 + 4x^2 + 2x - 4 \\ &= 4x^2 - 10x - 3 \end{aligned}$$

إذن الدالة f تحقق المعادلة التفاضلية (E).

ومنه فإن الدالة f حل خاص للمعادلة (E)

2. أ. نحل المعادلة التفاضلية $y'' - 3y' + 2y = 0$

لدينا المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية هي $r^2 - 3r + 2 = 0$ بحساب المميز $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$ نجد الحلين هما

$$r_2 = 2 \text{ و } r_1 = 1$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هي الدوال المعرفة ب : $y : x \rightarrow \alpha e^x + \beta e^{2x}$ حيث $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

ب. الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو الدوال : $y : x \rightarrow \alpha e^x + \beta e^{2x} + 2x^2 + x - 2$ حيث $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

3. لدينا $y(0) = 0$ إذن $\alpha + \beta - 2 = 0$

لدينا $y'(x) = \alpha e^x + 2\beta e^{2x} + 4x + 1$ و $y'(0) = 4$ إذن $\alpha + 2\beta + 1 = 4$

$$\text{نحصل على النظام التالي} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = 3 \end{cases} \text{ نجد } \alpha = \beta = 1$$

إذن الحل الخاص هو $y_0 : x \rightarrow e^x + e^{2x} + 2x^2 + x - 2$

التمرين الثاني :

1. لدينا $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية حدها الأول $u_1 = 2$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$ إذن الحد العام هو $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$

ومنه فإن $u_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ لكل n من \mathbb{N}^* .

2. أ. لدينا $V_n = 1 - \frac{u_n}{n}$ و $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ إذن $V_n = 1 - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

ب. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

3. لدينا:

$$\begin{aligned} S'_n + S_n &= (v_1 + 2v_2 + 3v_3 + \dots + nv_n) + (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \\ &= \left(\left(1 - \frac{u_1}{1}\right) + 2 \left(1 - \frac{u_2}{2}\right) + 3 \left(1 - \frac{u_3}{3}\right) + \dots + n \left(1 - \frac{u_n}{n}\right) \right) + (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \\ &= (1 - u_1 + 2 - u_2 + 3 - u_3 + \dots + n - u_n) + (u_1 + u_2 + \dots + u_n) \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= u_1 + u_2 + \dots + u_{10} \\
 &= u_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} \\
 &= 4 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) \\
 &= 4 - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\
 &= 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\
 &= 4 - \frac{1}{256} \\
 &= \frac{1023}{256}
 \end{aligned}$$

لدينا $S'_n + S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ لكل n من \mathbb{N}^* إذن $S'_{10} + S_{10} = \frac{10(10+1)}{2} = 55$ ومنه فان

$$S'_{10} = 55 - S_{10} = 55 - \frac{1023}{256} = \frac{13057}{256}$$

التمرين الثالث :

I- لدينا الدالة العددية h المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $h(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln x$

1. بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x\sqrt{x} - 2 = -2$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$

* لدينا $h(x) = x \left(2\sqrt{x} - \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$ بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$

فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

2. لدينا لكل x من $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= (2x)' \sqrt{x} + 2x(\sqrt{x})' + (\ln x)' \\
 &= 2\sqrt{x} + 2x \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \\
 &= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \\
 &= 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

بما أن $3\sqrt{x} > 0$ و $\frac{1}{x} > 0$ فان $h'(x) > 0$ ومنه فان الدالة h تزايدية على $]0, +\infty[$

ب . لدينا $h(1) = 2 - 2 + \ln(1) = 0$

إذا كان $x \in]0, 1]$ لدينا $x \leq 1$ إذن $h(x) \leq h(1)$ أي $h(x) \leq 0$

إذا كان $x \in [1, +\infty[$ لدينا $x \geq 1$ إذن $h(x) \geq h(1)$ أي $h(x) \geq 0$

(II) 1. أ . لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\infty$

و لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} x - 1 = -1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

التأويل الهندسي : المنحنى (C) يقبل مقارب رأسي معادلته $x = 0$.

ب . لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ إذن المنحنى (C) يقبل مقارب مائل معادلته $y = x - 1$.

2. أ . لكل x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{(\ln x)' \sqrt{x} - (\ln x) (\sqrt{x})'}{\sqrt{x}^2} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - (\ln x) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= 1 - \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x\sqrt{x} - 2 + \ln x}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{h(x)}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

ب . لدينا $f'(x) = \frac{h(x)}{2x\sqrt{x}}$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$

بما أن $2x\sqrt{x} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $h(x)$

جدول تغيرات الدالة f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	ϕ	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3. أ. لدينا $f(x) - (x-1) = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$.

إشارة $f(x) - (x-1)$ هي عكس إشارة $\ln x$

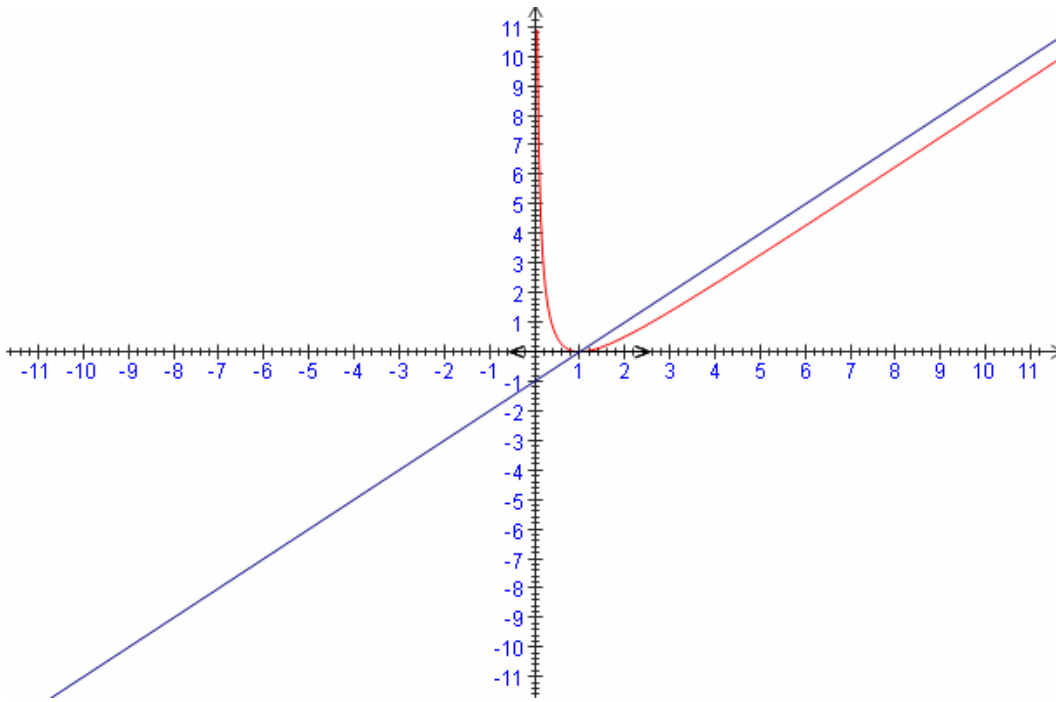
x	0	1	$+\infty$
$f(x) - (x-1)$		+	-
الوضع النسبي ل: (C) و (D)	المنحنى (C) فوق المستقيم (D)		المنحنى (C) تحت المستقيم (D)

ب. نقطة تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (D) هي $A(1,0)$.

ب. المنحنى (C):

(D)

(C)



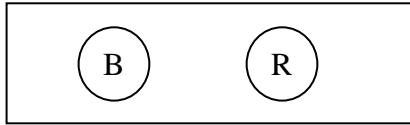
4. نضع $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = 2\sqrt{x} \end{cases}$ ومنه فإن

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \left[2\sqrt{x} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} dx \\ &= \left[2\sqrt{x} \ln x \right]_1^e - 2 \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \left[2\sqrt{x} \ln x \right]_1^e - 2 \left[2\sqrt{x} \right]_1^e \\ &= \left[(2\sqrt{e} \ln e) - (2 \ln(1)) \right] - 2(2\sqrt{e} - 2) \\ &= 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 \\ &= 4 - 2\sqrt{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^e f(x) dx \\
 &= \int_1^e \left(x-1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right) dx \\
 &= \int_1^e (x-1) dx - \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^e - (4 - 2\sqrt{e}) \\
 &= \left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - 4 + 2\sqrt{e} \\
 &= \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} - 4 + 2\sqrt{e} \\
 &= \frac{e^2}{2} - e + 2\sqrt{e} - \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

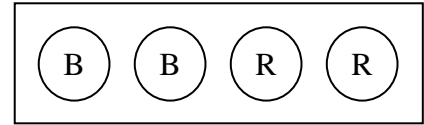
التمرين الرابع :

U_2 :



و

U_1 :



1. لدينا $card(\Omega) = C_4^2 \cdot C_4^1 = 24$

ولدينا $card(E) = C_2^2 \cdot C_4^1 + C_2^1 \cdot C_4^2 = 8$ إذن $P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

ب. لدينا $card(F) = C_2^2 \cdot C_3^1 + C_2^1 \cdot C_3^2 = 6$ إذن $p(F) = \frac{card(F)}{card(\Omega)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

ج. E : « الكرتان المسحوبتان من U_1 لهما نفس اللون »
 \bar{F} : « الحصول على ثلاث كرات من لونين مختلفين »
 لدينا

$$P_E(\bar{F}) = \frac{P(E \cap \bar{F})}{P(E)}$$

$E \cap \bar{F}$ « الكرتان المسحوبتان من U_1 لهما نفس اللون و الحصول على ثلاث كرات من لونين مختلفين » الحالتين هما:

(B B) من U_1 و (R R) من U_2

(R R) من U_1 و (B B) من U_2

إذن $card(E \cap \bar{F}) = C_2^2 \cdot C_1^1 + C_2^1 \cdot C_1^1 = 2$ و منه $p(E \cap \bar{F}) = \frac{card(E \cap \bar{F})}{card(\Omega)} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

$$p_E(\bar{F}) = \frac{P(E \cap \bar{F})}{P(E)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

ومنه فان

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{أ. 2}$$

ب قانون احتمال X:

$$p(X = 0) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_4^2 \cdot C_4^1} = \frac{3}{24}$$

$$p(X = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 + C_2^2 \cdot C_1^1}{C_4^2 \cdot C_4^1} = \frac{9}{24}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_2^2 \cdot C_1^1 + C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1}{C_4^2 \cdot C_4^1} = \frac{9}{24}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^1}{C_4^2 \cdot C_4^1} = \frac{3}{24}$$

	0	1	2	3
$p(X = X_i)$				
$p(X = X_i)$	$\frac{3}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{3}{24}$