



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الاستدراكية 2011  
الموضوع



الصفحة
1
4

9	المعامل	RS24	الرياضيات	المادة
4	مدة الإجابة		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة (ة) أو المجلد

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات .....(2.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(4ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(4ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

$$\text{لكل } x \text{ و } y \text{ من المجال } ]0,1[ \text{ نضع: } x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

1- (أ) بين أن \* قانون تركيب داخلي في I . 0.5

(ب) بين أن القانون \* تبادلي و تجميعي. 0.5

(ج) بين أن (I, \*) يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.5

2- بين أن (I, \*) زمرة تبادلية. 0.5

$$3- \text{ نعتبر المجموعتين } H = \{2^n / n \in \mathbb{N}\} \text{ و } K = \left\{ \frac{1}{1+2^n} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

(أ) بين أن H زمرة جزئية للزمرة  $(\mathbb{N}, +, \times)$  0,5

(ب) نعتبر التطبيق:  $\varphi : H \rightarrow I$   
 $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  بين أن  $\varphi$  تشاكل من  $(H, \times)$  نحو  $(I, *)$  0,5

(ج) استنتج أن K زمرة جزئية للزمرة  $(I, *)$  0.5

التمرين الثاني: (2.5 نقط)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق:  $10^x \equiv 2 \pmod{19}$

1 - (أ) تحقق أن:  $10^{x+1} \equiv 1 \pmod{19}$  0.25

(ب) بين أن:  $10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$  0.5

2- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و x+1

(أ) بين أن:  $10^d \equiv 1 \pmod{19}$  0.75

(ب) بين أن: d = 18 0.5

(ج) استنتج أن:  $x \equiv 17 \pmod{18}$  0.5

التمرين الثالث: (4 نقط)

الجزء الأول: نعتبر في المجموعة  $\square$  المعادلة: (E)  $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$ 1- تحقق أن العدد  $-2i$  حل للمعادلة (E) 0.52- حدد العددين العقديين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث: 0.5

$$(\forall z \in \square) : z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

3- أ) حدد الجذرين المربعين للعدد  $5-12i$  0.5ب) حل في  $\square$  المعادلة (E) 0.5

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر.

نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي :  $a = -1+3i$  و  $b = -2i$  و  $c = 2+i$ 

1- بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C 0.5

2- نعتبر الدوران  $R_1$  الذي مركزه B وزاويته  $\frac{\pi}{3}$  و الدوران  $R_2$  الذي مركزه A وزاويته  $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها Z و صورتها بالدوران  $R_1$  و  $M_2$  صورتها بالدوران  $R_2$ أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران  $R_1$  هي :  $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$  0.5ب) حدد  $z_2$  لحق  $M_2$  بدلالة Z 0.5ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة  $[M_1M_2]$  ثابتة. 0.5

التمرين الرابع: (6 نقط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي:  $f(x) = x + \ln x$  وليكن (C) المنحنى الممثل للدالةf في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (نأخذ:  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$ )1- احسب النهايات التالية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$  1

2- أ) ضع جدول تغيرات الدالة f 0.25

ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال  $]0, +\infty[$  نحو مجال J يتم تحديده ، ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي  $f^{-1}$ . 0.753- احسب  $f(1)$  و  $f(e)$  ثم أنشئ (C) و (C') منحنى الدالة  $f^{-1}$  في نفس المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  0.754- أ) احسب التكامل  $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$  (يمكنك وضع:  $t = f^{-1}(x)$ ) 0.5ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين (C') و المستقيمت ذات المعادلات:  $x=1$  و  $x=e+1$  و  $y=x$  0.5

5- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم  $n$  نعتبر المعادلة :  $(E_n) : x + \ln x = n$

(أ) بين أن المعادلة  $(E_n)$  تقبل حلا وحيدا  $x_n$

(ب) حدد قيمة  $x_1$  ثم بين أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

6- (أ) بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{L}^*) f(x_n) \leq f(n)$  ثم استنتج أن :  $x_n \leq n$  ( $\forall n \in \mathbb{L}^*$ )

(ب) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{L}^*) n - \ln(n) \leq x_n$

(ج) احسب النهايتين:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$

#### التمرين الخامس: (4 نقط)

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و  $f_n$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

1- بين أنه من أجل  $n \geq 2$  يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha_n$  من المجال  $]0,1[$  بحيث:  $f_n(\alpha_n) = 0$

2- بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. (نضع  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ )

3- (أ) تحقق أنه من أجل  $t \neq 1$  لدينا :  $1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

(ب) استنتج أن:  $\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

4- (أ) بين أن:  $1 + \ln(1 - \alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

(ب) بين أن:  $0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$  ( $\forall n \geq 2$ )

(ج) استنتج أن:  $\ell = 1 - e^{-1}$

انتهى



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الاستدراكية 2011  
عناصر الإجابة



الصفحة
1
2

9	المعامل	RR24	الرياضيات	المادة
4	مادة الإقفاص		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب (ة) أو المجلد

		التمرين الأول
		أ) -1
	* قانون تركيب داخلي ..... 0,5 ن	ب) * تبادلي ..... 0,25 ن
	* تجميعي ..... 0,25 ن	ج) $\frac{1}{2}$ عنصر محايد, ..... 0,5 ن
	-2	مماثل عنصر ..... 0,25 ن
	(I, *) زمرة تبادلية ..... 0,25 ن	أ) -3
	H زمرة جزئية ..... 0,5 ن	ب) $\varphi$ تشاكل ..... 0,5 ن
	K زمرة جزئية ..... 0,5 ن	ج)
		التمرين الثاني
		أ) -1
	$10^{x+1} \equiv 1 [19]$ ..... 0,25 ن	ب)
	$10^{18} \equiv 1 [19]$ ..... 0,5 ن	أ) -2
	$10^d \equiv 1 [19]$ , ..... 0,75 ن	ب)
	$d = 18$ , ..... 0,5 ن	ج)
	الاستنتاج ..... 0,5 ن	
		التمرين الثالث
		الجزء الأول: -1
	التحقق ..... 0,5 ن	-2
	تحديد $\alpha$ و $\beta$ ..... 0,5 ن	أ) -3
	تحديد الجذرين المربعين ..... 0,5 ن	ب)
	حل المعادلة ..... 0,5 ن	الجزء الثاني: -1
	متساوي الساقين ..... 0,25 ن	قائم الزاوية ..... 0,25 ن
	..... 0,5 ن	أ) -2
	..... 0,5 ن	ب)
	الإستنتاج ..... 0,5 ن	ج)

			التمرين الرابع
	-1	عن كل نهاية..... 0,25 ن	
	-2 (أ)	جدول التغيرات, ..... 0,25 ن	
	(ب)	الدالة f تقابل من $\Pi_+^*$ نحو $\Pi_-$ ..... 0,5 ن جدول تغيرات التقابل العكسي ..... 0,25 ن	
	-3	إنشاء (C) ..... 0,25 ن إنشاء (C') ..... 0,5 ن	
	-4 (أ)	حساب التكامل, ..... 0,5 ن	
	(ب)	حساب المساحة ..... 0,5 ن	
	-5 (أ)	وجود ووحدانية الحل ..... 0,25 ن	
	(ب)	تحديد قيمة $X_1$ , ..... 0,25 ن حساب النهاية, ..... 0,25 ن	
	-6 (أ)	المتفاوتة ..... 0,25 ن الاستنتاج ..... 0,25 ن	
	(ب)	المتفاوتة ..... 0,5 ن	
	(ج)	كل نهاية, ..... 0,25 ن	

			التمرين الخامس
	-1	وجود ووحدانية $\alpha_n$ ..... 0,5 ن	
	-2	المتتالية تناقصية قطعاً ..... 0,5 ن المتتالية مصغورة ..... 0,25 ن	
	-3 (أ)	التحقق, ..... 0,5 ن	
	(ب)	الاستنتاج, ..... 0,5 ن	
	-4 (أ)	إثبات المتساوية, ..... 0,5 ن	
	(ب)	تأطير التكامل, ..... 0,5 ن	
	(ج)	استنتاج قيمة I ..... 0,75 ن	