

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2013

الموضوع



RS24



4	مدة الإجازة	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بحساب الاحتمالات.....(3ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(8.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(1.75ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول : (3.5 نقط) (الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما)

I - لكل x و y من المجال $G =]1, 2[$ نضع:

$$x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

1- بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G 0.5

2- نذكر أن $(\square, +, \times)$ زمرة تبادلية.

نعتبر التطبيق f من \square نحو G المعرف بما يلي:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

(أ) بين أن f تشاكل تقابلي من $(\square, +, \times)$ نحو $(G, *)$ 0.75

(ب) استنتج أن $(G, *)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد . 0.5

II - نذكر أن $(M_3(\square), +, \times)$ حلقة واحدة صفورها

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و وحدتها } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و أن $(M_3(\square), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(أ) تحقق أن: $A^3 = O$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(M_3(\square), +, \times)$. 0.5

(ب) تحقق أن: $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ ثم استنتج أن المصفوفة $A + I$ تقبل مقلوبا في $(M_3(\square), +, \times)$ يتم تحديده. 0.5

2 - لكل a و b من \square نضع $M(a, b) = aI + bA$ و نعتبر المجموعة $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \square^2\}$ 0.75
بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له.

التمرين الثاني: (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I - نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق.

(1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1

(2) احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X 0.5

II - نقوم بالتجربة العشوائية التالية في 3 مراحل كالاتي:

المرحلة 1: نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق.

المرحلة 2: نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى.

المرحلة 3: نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الكيس الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية.

نعتبر الأحداث التالية:

N "الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء"
R "الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء"
E "جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء"

(1) بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$ 0.5

(2) احسب $p(E)$ 0.5

(3) احسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق. 0.5

التمرين الثالث: (3.5 ن)

I - ليكن a عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة \square المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$ (E)

(1) بين أن: $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$ و $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$ هما حلتي المعادلة (E) 0.5

(2) نأخذ : $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$

أ- بين أن: $a - 1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$ 0.5

ب- استنتج الشكل المثلثي لكل حل من الحلين Z_2 و Z_1 1

II - المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نفترض أن: $\text{Re}(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$

(1) حدد لحقي كل من J و K منتصفي $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a 0.5

(2) ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و r_2 الدوران الذي مركزه K وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

نضع $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$ و ليكن c' لحق C' و a' لحق A'

بين أن: $a' = z_1$ و $c' = z_2$ 0.5

(3) أحسب $\frac{a' - c'}{a - 1}$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'BC'$. 0.5

التمرين الرابع: (8.25 ن)

(1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}}$
 $f(0) = 1$

أ- بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0.5

ب - ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0$) 0.5

ج - بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وأن: $f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$; $(\forall x > 0)$ 0.5

د - ضع جدول تغيرات الدالة f 0.5

(2) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

وليكن (C_F) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

أ - حدد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e, +\infty[$ 0.25

ب - بين أن : $t \ln t \leq \sqrt{1+t^2} \ln^2 t \leq \sqrt{2} t \ln t$; $(\forall t \geq e)$ 0.5

ج - بين أن : $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2} \ln^2 t} dt \leq \ln(\ln x)$; $(\forall x \geq e)$ 0.75

د- استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ 0.5

هـ - بين أن (C_F) يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفضول كل واحدة منهما. 0.5

ز - أنشئ (C_F) (نأخذ $F(1) \square 0,5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right) \square 0,4$) 1

(3) لكل x من $[0, +\infty[$ نضع : $\varphi(x) = x - F(x)$

أ - بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ 0.75

ب - بين أنه لكل n من \mathbb{N} ، المعادلة $\varphi(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0, +\infty[$ 0.5

ج - بين أن : $\alpha_n \geq n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ 0.5

(4) أ- بين أن : $(\forall n \geq 1) ; 0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$ (يمكنك استعمال مبرهنة التزايد المتناهية) 0.5

ب - احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$ 0.5

التمرين الخامس: (1.75 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$ و $v_n = \ln(u_n)$

(1) تحقق أن : $v_n = n^2 (\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)))$; $(\forall n \geq 1)$ 0.25

(2) باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية ، بين أن : $v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$; $(\forall n \geq 1)(\exists c \in]n, n+1[)$ 0.5

(3) بين أن : $\frac{-n^2}{(1+n^2) \arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2) \arctan(n+1)}$; $(\forall n \geq 1)$ 0.5

(4) احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.5

انتهى