

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

## الدورة الاستدراكية 2014

### الموضوع

RS 24

ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ  
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵢⵜ  
ⵏ ⵙⴰⵎⴰⵏⵓ ⵏ ⵙⴰⵎⴰⵏⵓ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ستة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بحساب الاحتمالات.....(2ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(1ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.75ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(7.5ن)
- التمرين السادس يتعلق بالتحليل.....(2.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (2 ن)

نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W .  
يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين و يحتوي كل صندوق من الصندوقين U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين.

نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من الصندوق W. إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تانيا كرتين ، أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V ثم نسحب منه تانيا كرتين.

- 1- ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟ 0.25  
2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة؟ 0.75  
3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة.  
حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1

التمرين الثاني: (1 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

$$\text{نضع: } b_n = 2 \cdot 10^n + 1 \text{ و } c_n = 2 \cdot 10^n - 1$$

- 1- بين أن:  $c_n \nmid c_n$   $c_n$  ظ  $b_n$  ثم استنتج أن  $b_n$  و  $c_n$  أوليان فيما بينهما. 0.5

(b ظ a هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b)

- 2- أوجد زوجا  $(x_n, y_n)$  من  $\phi^2$  يحقق:  $b_n x_n + c_n y_n = 1$  0.5

التمرين الثالث: (3,75 ن)

نضع  $J = ]-1, 1[$

1- لكل عنصرين a و b من المجال J ، نضع:  $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

- 1- تحقق أن:  $1 + ab > 0$  ("  $J^2$  خ (a,b) ") ثم استنتج أن \* قانون تركيب داخلي في J 0.75

2- (أ) بين أن القانون \* تبادلي و تجمعي. 0.5

(ب) بين أن (J, \*) يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.25

(ج) بين أن (J, \*) زمرة تبادلية. 0.5

II - نعتبر التطبيق f المعرف على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1- بين أن الدالة f تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو J 0.75

2- ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب) .

لكل عنصرين x و y من J نضع:  $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

بين أن f تشاكل من  $(\mathbb{R}, \times)$  نحو  $(J, \perp)$  حيث:  $J^* = J - \{0\}$  0.5

3- نذكر أن  $(\mathbb{R}, \times)$  زمرة تبادلية، ونقبل أن القانون  $\perp$  توزيعي بالنسبة للقانون \* في J .

بين أن  $(J, *, \perp)$  جسم تبادلي. 0.5

التمرين الرابع: (3.25 ن)

1- I حل في f المعادلة:  $z^2 + i = 0$  (a يرمز لحل المعادلة بحيث:  $\text{Re}(a) > 0$ ) 0.5

2- (أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي  $1 + a$  0.5

(ب) استنتج أن:  $\cos \frac{p}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$  0.25

(ج) تحقق أن:  $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$  ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد  $1 - a$  0.5

II - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O, u, v)$  ، نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $M$  و  $M'$

التي ألقاها على التوالي هي  $a$  و  $-a$  و  $z$  و  $z'$  و نفترض أن:  $zz' + i = 0$

1- لتكن  $N$  النقطة التي لحقها  $\bar{z}$  مرافق  $z$

بين أن المستقيمين  $(ON)$  و  $(OM')$  متعامدان.

0.25

2- (أ) بين أن :  $z' - a = i \frac{z - a}{az}$

0.25

(ب) بين أنه إذا كان  $z^1 - a$  فإن  $z'^1 - a$  و  $\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z - a}{z + a}$

0.5

3- نفترض أن النقط  $A$  و  $B$  و  $M$  غير مستقيمية.

بين أن النقطة  $M'$  تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABM$

0.5

### التمرين الخامس: (7.5 نقط)

I- لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي:  $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

ولیکن (C) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, i, j)$  بحيث:  $\|i\| = 1 \text{ cm}$

1- أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

1

2- أحسب  $f'(x)$  ثم استنتج تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$

0.75

3- لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  نعتبر الدالة العددية  $g_n$  المعرفة على  $]0, 1[$  بما يلي:  $g_n(x) = f(x) - x^n$

(أ) بين أن الدالة  $g_n$  تناقصية قطعاً على المجال  $]0, 1[$

0.25

(ب) استنتج أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha_n$  من المجال  $]0, 1[$  بحيث:  $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$

0.5

(ج) بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا:  $g_n(a_{n+1}) < 0$

0.5

(د) بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة.

0.75

4- نضع  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(أ) تحقق أن  $0 < a_1 \leq 1 \leq a_2$

0.25

(ب) تحقق أن:  $h(a_n) = n$  ("  $n \in \mathbb{N}^*$  ") حيث:  $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$

0.25

(ج) بين أن:  $l = 1$

0.5

(د) استنتج أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$

0.25

II - (أ) أدرس إشارة التكامل  $\int_x^1 f(x) dx$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}_+$  ،

0.25

(ب) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن:  $\int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$  ("  $x \in \mathbb{R}_+$  ")

0.5

(ج) استنتج بالوحدة  $\text{cm}^2$  مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي:

0.25

$x = 1$  و  $x = e^2$  و  $y = 0$

$$2- \text{ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم } n \text{ نضع: } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين  $n$  و  $k$  بحيث  $n \geq 2$  و  $1 \leq k \leq n-1$  لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(ب) بين أن :  $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$  ("n خ \*")

(ج) استنتج أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

**التمرين السادس (2.5 نقط)**

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:  $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt$

1- لكل  $x$  من ، نضع :  $k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

(أ) تحقق أنه لكل  $x$  من المجال  $[0, +\infty[$  لدينا:  $g(x) = -k(\sqrt{x})$

(ب) بين أن الدالة  $g$  متصلة على  $[0, +\infty[$  وقابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

(ج) احسب  $g'(x)$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ثم استنتج أن الدالة  $g$  تناقصية قطعاً على المجال  $[0, +\infty[$

2- (أ) بين أن:  $\frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$  ( $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ )

(ب) استنتج أن الدالة  $g$  غير قابلة للاشتقاق على اليمين في  $0$  و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها.

انتهى

## الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2014  
عناصر الإجابة

RR 24

ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ  
ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ  
ⵏ ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ ⵜⴰⵎⴰⵔⴰⵏⵜ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة أو المسلك

## عناصر الإجابة و سلم التنقيط

النقطة الممنوحة	عناصر الإجابة	2 نقط	التمرين الأول
تمنح 0.25 نقطة	هو احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق W : $\frac{2}{3}$	-1	
تمنح 0.75 نقطة	$p(2b) = p(2b/U) \cdot p(U) + p(2b/V) \cdot p(V) = \frac{7}{30}$	-2	
تمنح 0.25 نقطة لمجموعة القيم تمنح 0.75 نقطة لتحديد قانون الاحتمال	مجموعة قيم X هي: $\{0,1,2\}$ $p(1b) = \frac{18}{30}$ و $p(0b) = \frac{5}{30}$	-3	
		1 نقطة	التمرين الثاني
تمنح 0.25 نقطة تمنح 0.25 نقطة	$b_n = c_n + 2$ و تطبيق مبرهنة أفليديس ثم $2 \cdot 10^n - c_n = 1$ و تطبيق مبرهنة بوزو. و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	-1	
تمنح 0.5 نقطة	زوج معاملات بوزو	-2	
		3.75 نقط	التمرين الثالث
تمنح 0.25 نقطة للتحقق تمنح 0.5 نقطة للاستنتاج	التحقق و الاستنتاج	-1- I	
تمنح 0.25 نقطة تمنح 0.25 نقطة	القانون تبادلي القانون تجميعي	-2 (أ)	
تمنح 0.25 نقطة	تحديد العنصر المحايد	(ب)	

الصفحة	RR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2014 - عناصر الإجابة		
2		- مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)		
4				
تمنح 0.5 نقطة	زمرة تبادلية	(ج)		
تمنح 0.75 نقطة	تقبل مختلف الأجوبة الصحيحة	-1- II		
تمنح 0.5 نقطة	التشاكل	-2		
تمنح 0.5 نقطة	جسم تبادلي بتوظيف التشاكل التبادلي	-3		
		3.25	التمرين الرابع	نقط
تمنح 0.5 نقطة	حلي المعادلة: $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$	-1- I		
تمنح 0.25 نقطة لكل نتيجة	$\arg(1+a)$ ؛ $-\frac{p}{8}[2p]$ و $ 1+a  = \sqrt{2+\sqrt{2}}$	(أ-2)		
تمنح 0.25 نقطة	الإستنتاج: $\cos\frac{p}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	(ب)		
تمنح 0.25 نقطة	التحقق	(ج)		
تمنح 0.25 نقطة	الإستنتاج			
تمنح 0.25 نقطة	لدينا $\frac{z'}{z}$ تخيلي صرف	-1- II		
تمنح 0.25 نقطة	المتساوية	(أ-2)		
تمنح 0.5 نقطة	المتساوية	(ب)		
تمنح 0.5 نقطة	النقط A و B و M و M' متداورة انطلاقا من نتيجة السؤال 2-ب)	-3		
		7.5	التمرين الخامس	نقط
تمنح 0.25 نقطة لكل نهاية و 0.25 نقطة لكل تأويل هندسي صحيح	حساب النهايتين التأويل الهندسي	-1- I		
تمنح 0.25 نقطة لحساب $f'(x)$	- حساب الدالة المشتقة الأولى	-2		
تمنح 0.5 نقطة للتغيرات	تغيرات الدالة			
تمنح 0.25 نقطة	$g_n$ تناقصية قطعا كمجموع دالتين تناقصيتين	(أ-3)		

الصفحة 3 4	RR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2014 - محاضر الإجابة - مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)		
	تمنح 0.5 نقطة	لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ الدالة $g_n$ متصلة ورتيبة قطعا على المجال $]0,1[$ إذن تقابل من $]0,1[$ نحو $]1,+ \infty [$ ..... و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(ب)	
	تمنح 0.5 نقطة	$g_n(a_{n+1}) = a_n^n(a_n - 1)$	(ج)	
	تمنح 0.5 نقطة تمنح 0.25 نقطة	المتتالية تزايدية قطعا : $g_n(a_{n+1}) < g_n(a_n)$ المتتالية متقاربة	(د)	
	تمنح 0.25 نقطة	الانطلاق من كون $0 < a_1 < a_n < 1$ و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(أ-4)	
	تمنح 0.25 نقطة	التحقق	(ب)	
	تمنح 0.5 نقطة	افتراض أن $1 < 1$ والحصول على تناقض من خلال استعمال نتيجة السؤال السابق وكون الدالة $h$ متصلة في $1$ و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(ج)	
	تمنح 0.25 نقطة	استعمال : $f(a_n) = (a_n)^n$ و كون الدالة $f$ متصلة في $1$ و تقبل أية طريقة صحيحة أخرى	(د)	
	تمنح 0.25 نقطة	إشارة التكامل	(أ-1- II)	
	تمنح 0.5 نقطة	حساب التكامل	(ب)	
	تمنح 0.25 نقطة	استنتاج المساحة	(ج)	
	تمنح 0.5 نقطة	المتفاوتة المزدوجة من خلال كون $f$ تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$	(أ-2)	
	تمنح 0.5 نقطة	اثبات المتفاوتة المزدوجة	(ب)	
	تمنح 0.5 نقطة	تحديد النهاية	(ج)	
			2.5 نقط	التمرين السادس
	تمنح 0.25 نقطة	التحقق	(أ-1)	
	تمنح 0.25 نقطة	الاتصال	(ب)	
	تمنح 0.25 نقطة	الاشتقاق		
	تمنح 0.25 نقطة تمنح 0.25 نقطة	حساب $g'(x)$ الاستنتاج	(ج)	

الصفحة 4 4	RR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2014 - محاضر الإجابة - مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)		
	<p>تمنح 0.5 نقطة</p> <p>تمنح 0.25 نقطة</p> <p>تمنح 0.5 نقطة إذا حصل المترشح على المتفاوتة مباشرة</p>	<p>- الدالة <math>g</math> متصلة على القطعة <math>[0, x]</math> و قابلة للاشتقاق على المجال <math>]0, x[</math> وتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على القطعة <math>[0, x]</math> بالنسبة للدالة <math>g</math></p> <p>- الدالة تناقصية قطعا للحصول على المتفاوتة وتقبل أية طريقة صحيحة أخرى</p>	2- (أ)	
	<p>تمنح 0.25 نقطة</p> <p>تمنح 0.25 نقطة للتأويل الهندسي</p>	<p>الاستنتاج</p> <p>التأويل الهندسي</p>	(ب)	