إنجاز الاستاذ : محسن الشرفي ثانوية المختار السوسي المعازيز
Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

القدرات المستهدفة

ــ التعرف على المتغير و مجموعة تعريفه بالنسبة لدالة معرفة بجدول معطيات أو بمنحنى أو بصيغة.
ــ قرآءة صورة عدد و تحديد عدد صورته معلومة من خلال التمثيل المبياني لدالة .
ــ استنتاج تغييرات دالة أو القيم القصوى و الدنيا انطلاقا من التمثيل المبياني .
ــ استعمال التمثيل المبياني لدراسة بعض المعادلات و المتراجحات .
ــ التمكن من رسم منحنى دالة حدودية من الدرجة 2 أو دالة متخاطة دون اللجوء إلى تغيير المعلم .
ــ التعبير عن وضعيات مستقاة من الواقع أو من مواد أخرى باستعمال مفهوم الدالة .

I ـ الدالة العددية :

1 ـ تعريف :

ليكن D جزء $\mathbb{R}$. نسمي f دالة عددية معرفة على D كل علاقة تربط كل عنصر من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$ يرمز له بالرمز $f(x)$.

إصطلاح :

لتكن f دالة عددية معرفة على D . نكتب $f : D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

** المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .

** ليكن x عنصر من D و y بحيث $y = f(x)$.

العدد y يسمى صورة x بالدالة f .

العدد x يسمى سابق y بالدالة f .

2 ـ مجموعة تعريف دالة عددية :

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x.

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب.

و نرمز لها بالرمز D_f.

مثال :

1 ـ حدد مجموعة تعريف الدالتين f و g المعرفتين على الشكل : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{2x-1}$.

$$x \in D_f \Leftrightarrow x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$x \in D_g \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$D_g = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

3 ـ تساوي دالتين عدديتين :

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين لهما نفس مجموعة التعريف D.

تكون الدالتين f و g متساويتين إذا و فقط إذا كان $f(x) = g(x)$ لكل $x \in D$. و نكتب $f = g$.

مثال :

بين أن الدالتين f و g المعرفتين على الشكل : $f(x) = (x-1)(x+2)+x-1$ و $g(x) = x^2+2x-3$.

** لدينا : $D_f = D_g$.

** لدينا : $f(x) = (x-1)(x+2)+x-1 = x^2+2x-x-2+x-1 = x^2+2x-3 = g(x)$

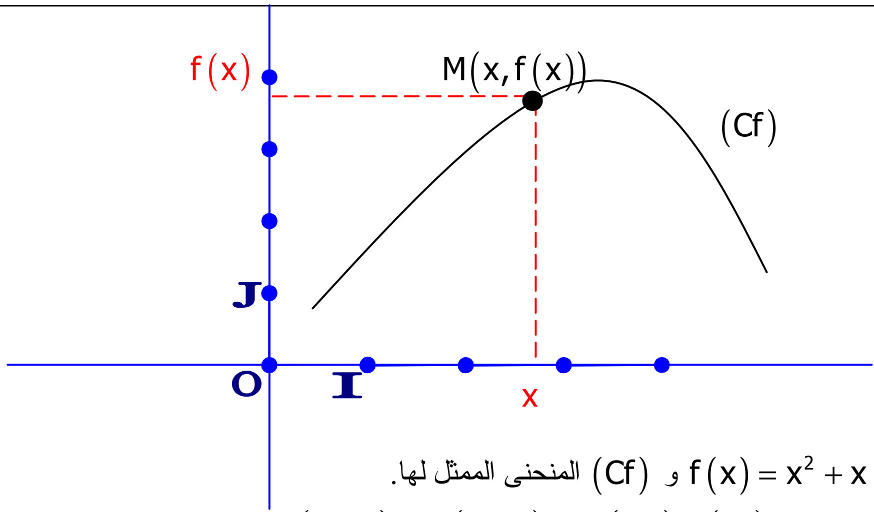
إذن : $f = g$.

4 ـ التمثيل المبياني لدالة عددية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل المبياني للدالة f هو مجموعة النقط $M(x, f(x))$ في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل $f(x)=x^2+x$ و (Cf) المنحنى الممثل لها.

حدد من بين النقط التالية تلك التي تنتمي إلى (Cf) : $A(1,1)$ و $B(-1,0)$ و $C(-3,6)$.

لدينا : $f(1)=1^2+1=2\neq 1$ إذن $A(1,1)\notin(Cf)$.

لدينا : $f(-1)=(-1)^2+(-1)=1-1=0$ إذن $B(-1,0)\in(Cf)$.

لدينا : $f(-3)=(-3)^2+(-3)=9-3=6$ إذن $C(-3,6)\in(Cf)$.

5 ـ الدالة الزوجية و الفردية :

أ ـ الدالة الزوجية :

تعريف :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان :

** لكل $x\in D_f$ لدينا $-x\in D_f$.

** لكل $x\in D_f$ لدينا $f(-x)=f(x)$.

مثال :

لنبين أن الدالة f المعرفة على الشكل $f(x)=x^2-|x|$ دالة زوجية .

** مجموعة تعريف الدالة f . $D_f=\mathbb{R}$

** لدينا لكل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $-x\in\mathbb{R}$.

** لدينا : $f(-x)=(-x)^2-|-x|=x^2-x=f(x)$.

ومنه الدالة f دالة زوجية .

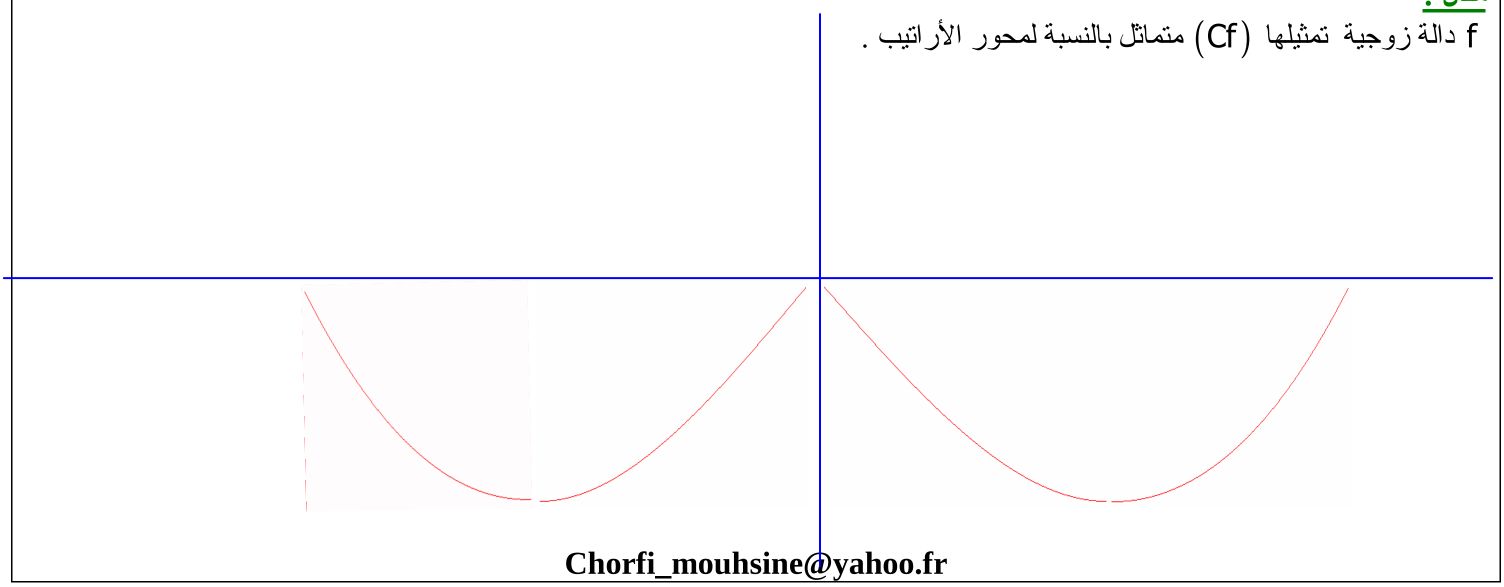
خاصية :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x و (Cf) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل لـ (Cf)

مثال :

f دالة زوجية تمثيلها (Cf) متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .



Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

ب ـ الدالة الفردية :

تعريف :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :

** لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$.

** لكل $x \in D_f$ لدينا $f(-x) = -f(x)$.

مثال :

لنبين أن الدالة f المعرفة على الشكل $f(x) = x^3 - x$ دالة فردية .

** مجموعة تعريف الدالة f . $D_f = \mathbb{R}$

** لدينا لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$.

** لدينا : $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$.

ومنه الدالة f دالة فردية .

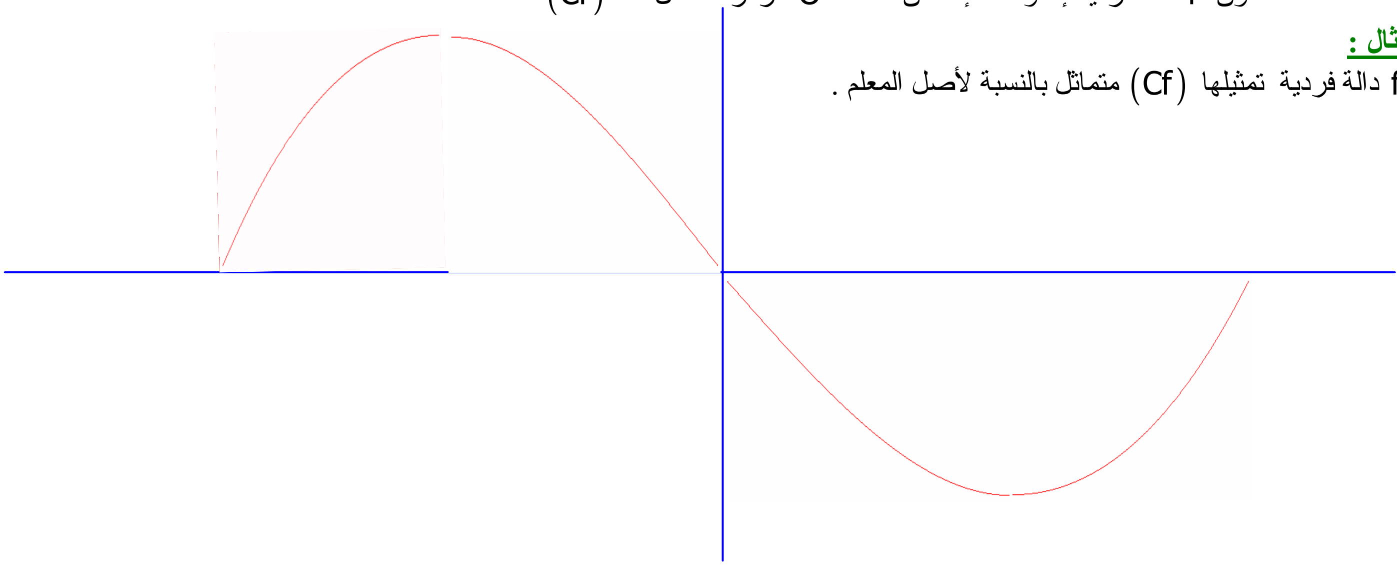
خاصية :

f دالة عددية لمتغير حقيقي x و (Cf) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كان النقطة O مركز تماثل لـ (Cf)

مثال :

f دالة فردية تمثيلها (Cf) متماثل بالنسبة لأصل المعلم .



II ـ تغييرات دالة عددية :

1 ـ تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .

** نقول إن الدالة f تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل x و y من I .

إذا كان $x < y$ فإن $f(x) < f(y)$

** نقول إن الدالة f تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل x و y من I .

إذا كان $x < y$ فإن $f(x) > f(y)$

** نقول إن الدالة f ثابتة على I إذا و فقط إذا كان لكل x و y من I .

لدينا $f(x) = f(y)$

2 ـ تعريف و خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I و x و y ينتميان إلى I و $x \neq y$.

** العدد $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ يسمى معدل تغير الدالة f .

** إذا كان $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$ (أو $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$) فإن الدالة f تزايدية قطعا (أو تزايدية)

** إذا كان $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$ (أو $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$) فإن الدالة f تناقصية قطعا (أو تناقصية)

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

** إذا كان $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=0$ فإن الدالة f ثابتة .

3 ـ رتابة دالة على مجال :

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

نقول إن f رتيبة قطعا على المجال I إذا كانت تزايدية قطعا على I أو تناقصية قطعا على I

مثال :

1 ـ أدرس رتابة الدالة f على المجالين $[1,+\infty[$ و $]-\infty,1]$ بحيث $f(x)=x^2-2x$.

لدراسة الرتابة نستعمل معدل تغير الدالة f : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ لكل $x\in\mathbb{R}$ و $x\neq y$.

لدينا : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{(x^2-2x)-(y^2-2y)}{x-y}=\frac{x^2-2x-y^2+2y}{x-y}=\frac{x^2-y^2-2x+2y}{x-y}$

نحاول تعميل البسط للإختزال : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x^2-y^2-2x+2y}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)-2(x-y)}{x-y}=x+y-2$

** في المجال $[1,+\infty[$:

لدينا : $x>1$ و $y>1$ ومنه $x+y>2$ إذن $x+y-2>0$ و بالتالي $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$ إذن الدالة f تزايدية على $[1,+\infty[$

** في المجال $]-\infty,1]$:

لدينا : $x<1$ و $y<1$ ومنه $x+y<2$ إذن $x+y-2<0$ و بالتالي $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$ إذن الدالة f تناقصية على $]-\infty,1]$

2 ـ ضع جدول تغييرات الدالة f :

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>↘</td><td>-1</td><td>↗</td></tr>
</table>

$f(1)=-1$

4 ـ القيم القصوى و الدنيا لدالة على مجال :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I.

$f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان $f(x)\leq f(a)$ لكل $x\in I$.

$f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على I إذا وفقط إذا كان $f(x)\geq f(a)$ لكل $x\in I$.

و نقول أن f تقبل قيمة قصوى أو دنيا عند النقطة a على I .

في هذه الحالة $f(a)$ تسمى مطرافا للدالة f .

مثال :

1 ـ لنبين أن الدالة $f(x)=x^2-2x+4$ تقبل قيمة دنيا عند النقطة 1 على $\mathbb{R}$.

** نحسب $f(x)-f(1)$ ونبين ان $f(x)-f(1)\geq 0$.

لدينا : $f(x)-f(1)=x^2-2x+4-3=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0$

إذن : $f(x)\geq f(1)$ و بالتالي $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على $\mathbb{R}$.

ومنه : الدالة f تقبل قيمة دنيا عند النقطة 1على $\mathbb{R}$.

2 ــ نعتبر الدالة f المعرفة بجدول تغييراتها

x	-6		0		2		6
$f(x)$	**0**	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

**العدد -1 هو القيمة الدنيا للدالة f في المجال $[-6,6]$ أي العدد $f(2)$ هو القيمة الدنيا للدالة f في المجال $[-6,6]$

و نقول أيضا أن الدالة f تقبل قيمة دنيا عند النقطة 2 على المجال $[-6,6]$.

** العدد 2 هو القيمة القصوى للدالة f في المجال $[-6,6]$ أي العدد $f(0)$ هو القيمة القصوى للدالة f في المجال $[-6,6]$

و نقول أيضا أن الدالة f تقبل قيمة قصوى عند النقطة 0 على المجال $[-6,6]$.

II ـ الدالة الحدودية و المتخاطة :

1 ـ الدالة الحدودية :

أ ـ الدالة : ax^2 .

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=ax^2$.

** $D_f=\mathbb{R}$.

** f دالة زوجية .

** ـــ إذا كان $a>0$

فإن f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ و تناقصية قطعا على المجال $]-\infty,0]$.

ـــ إذا كان $a<0$

فإن f تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ و تزايدية قطعا على المجال $]-\infty,0]$.

** جدول تغييرات الدالة f .

* **إذا كان** $a>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

* **إذا كان** $a<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	**0**	$\searrow$	

** المنحنى الممثل للدالة f يسمى شلجما رأسه أصل المعلم و يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل له .

مثال 1:

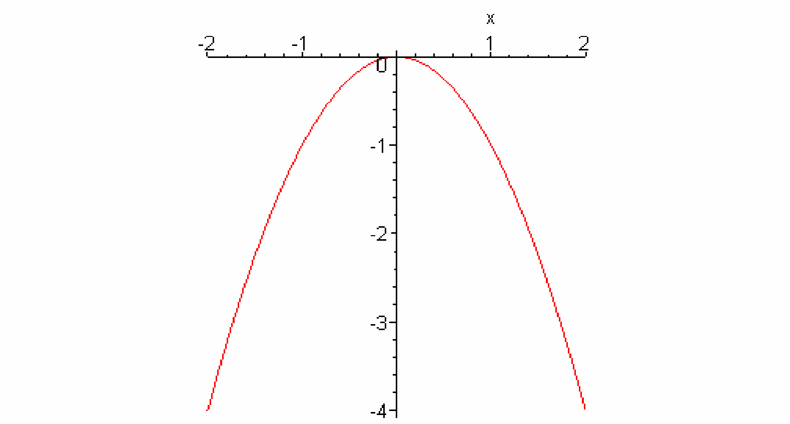
** نعتبر الدالة $f(x)=-x^2$.

لدينا $a=-1<0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	**0**	$\searrow$	

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

منحنى الدالة $f(x) = -x^2$.



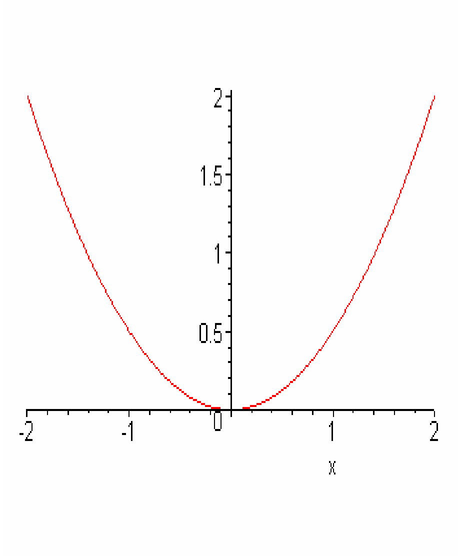
مثال 2:

** نعتبر الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

لدينا $a = \frac{1}{2} > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

منحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.



ب ـ الدالة : $ax^2 + bx + c$

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل $f(x) = ax^2 + bx + c$.

** $D_f = \mathbb{R}$.

** جدول تغييرات الدالة f .

إذا كان $a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↗

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

إذا كان $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	↘

بإستعمال الشكل القانوني للحدودية ax^2+bx+c نحصل على : $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

ومنه : $f(x)+\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ نضع $\alpha=-\frac{b}{2a}$ و $\beta=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

نستنتج أن : $f(x)-\beta=a(x-\alpha)^2$.

** نقبل أن منحنى الدالة الحدودية f هو صورة الشلجم الذي معادلته $y=ax^2$ بالإزاحة التي متجهتها $\vec{u}(\alpha,\beta)$.

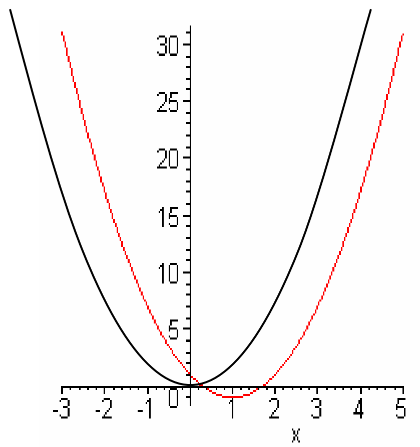
مثال 3 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=2x^2-4x+1$.

** لدينا : $-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times 2}=1$ و $f(1)=-1$ و بما أن $a=2>0$ فإن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f(1)=-1$	↗

** منحنى الدالة f هو هو صورة الشلجم الذي معادلته $y=ax^2$ بالإزاحة التي متجهتها $\vec{u}(1,-1)$.



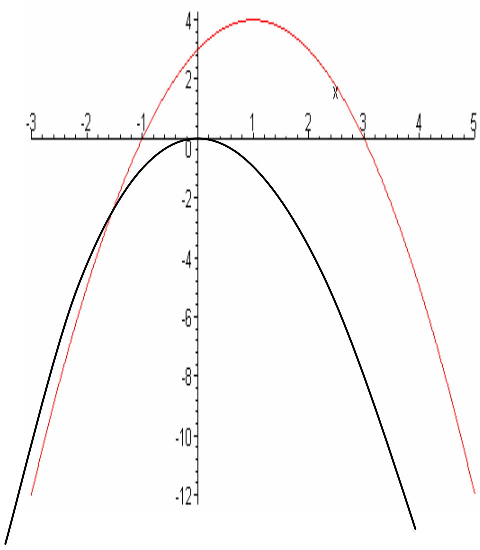
مثال 4 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=-x^2+2x+3$.

** لدينا : $-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\times(-1)}=1$ و $f(1)=4$ و بما أن $a=-1<0$ فإن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f(1)=4$	↘

** منحنى الدالة f هو هو صورة الشلجم الذي معادلته $y = ax^2$ بالإزاحة التي متجهتها $\vec{u}(1,4)$.



Chorfi_mouhsine@yahoo.fr