ثانوية المختار السوسي المعازيز	إنجاز الاستاذ : محسن الشرفي
مستوى جذع مشترك علوم	تمارين : الدوال

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين رقم 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

1 – حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2 – أدرس زوجية الدالة f على D_f .

3 – أدرس رتابة الدالة f على المجالين $[0,1]$ و $[1,+\infty[$.

4 – ضع جدول تغييرات الدالة f على D_f .

5 – حدد مطارف الدالة f في المجال $[-3,3]$.

الحل :

1 – $x\in D_f \Leftrightarrow x^2+1\neq 0$ و بما أن لكل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $x^2+1\neq 0$ إذن $D_f=\mathbb{R}$.

2 – ** لدينا : لكل $x\in\mathbb{R}$ فإن لكل $-x\in\mathbb{R}$.

** لدينا : $f(-x)=\dfrac{2\times(-x)}{(-x)^2+1}=\dfrac{-2x}{x^2+1}=-\dfrac{2x}{x^2+1}=-f(x)$.

ومنه الدالة f فردية على D_f .

3 – لدراسة الرتابة نستعمل معدل التغير : $\dfrac{\dfrac{2x(y^2+1)-2y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}}{x-y}=\dfrac{\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{2y}{y^2+1}}{x-y}=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ بحيث $x\neq y$

$$=\frac{2xy^2+2x-2yx^2-2y}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)}=\frac{2xy^2-2yx^2+2x-2y}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)}$$

$$=\frac{2xy(y-x)+2(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)}=\frac{(2xy-2)(y-x)}{(x^2+1)(y^2+1)(x-y)}$$

$$=\frac{-(2xy-2)}{(x^2+1)(y^2+1)}$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $[0,1]$.

إذن $0<x<1$ و $0<y<1$ ومنه $0<xy<1$ إذن $0<2xy<2$ و بالتالي $-2<2xy-2<0$ إذن $0<-(2xy-2)<2$

ومنه : $-(2xy-2)>0$ و بما أن $(x^2+1)(y^2+1)>0$ فإن $\dfrac{-(2xy-2)}{(x^2+1)(y^2+1)}>0$ وبالتالي f تزايدية على المجال $[0,1]$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $[1,+\infty[$.

إذن $x>1$ و $y>1$ ومنه $xy>1$ إذن $2xy>2$ و بالتالي $2xy-2>0$ إذن $-(2xy-2)<0$

ومنه : $-(2xy-2)<0$ و بما أن $(x^2+1)(y^2+1)>0$ فإن $\dfrac{-(2xy-2)}{(x^2+1)(y^2+1)}<0$ وبالتالي f تناقصية على المجال $[1,+\infty[$

4 – جدول تغييرات الدالة f

** أولا نضع جدول تغييرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	

الدالة f تزايدية على المجال $[0,1]$ و تناقصية على المجال $[1,+\infty[$ و $f(1)=1$ و $f(0)=0$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ -1 $\nearrow$ 0 $\nearrow$ 1 $\searrow$

بما أن الدالة f تناقصية على المجال $[1,+\infty[$ و نعلم أن الدالة f فردية فإنها تناقصية على $]-\infty,-1]$.

و بما أن الدالة f تزايدية على المجال $[0,1]$ و نعلم أن الدالة f فردية فإنها تزايدية على $[-1,0]$.

5 ـ نلاحظ إنطلاقا من جدول تغييرات الدالة f

أن لكل $x\in[-3,3]$ أن $-1\le f(x)\le 1$ إذن العدد 1 هو القيمة القصوى للدالة f و أن -1 هو القيمة الدنيا للدالة f .

تمرين رقم 2 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=\dfrac{-|x|}{x^2-1}$.

1 ـ حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2 ـ أدرس زوجية الدالة f على D_f .

3 ـ أدرس رتابة الدالة f على المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$.

4 ـ ضع جدول تغييرات الدالة f على D_f .

الحل :

1 ـ $x\in D_f \Leftrightarrow x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x-1\neq 0$ و $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ و $x\neq -1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

2 ـ ** لدينا : لكل $x\in D_f$ فإن لكل $-x\in D_f$.

** لدينا : $f(-x)=\dfrac{-|-x|}{(-x)^2-1}=\dfrac{-|x|}{x^2-1}=\dfrac{-|x|}{x^2-1}=f(x)$.

ومنه الدالة f زوجية على D_f .

3 ـ لدراسة الرتابة نستعمل معدل التغير : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{\dfrac{-|x|}{x^2-1}-\dfrac{-|y|}{y^2-1}}{x-y}=\dfrac{\dfrac{-|x|(y^2-1)+|y|(x^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)}}{x-y}$ بحيث $x\neq y$

$$=\frac{-|x|(y^2-1)+|y|(x^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

ليكن $x\in[0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{-|x|(y^2-1)+|y|(x^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{-x(y^2-1)+y(x^2-1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}$$

$$=\frac{-xy^2+x+yx^2-y}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{yx^2-xy^2+x-y}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{xy(x-y)+x-y}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}$$

$$=\frac{(x-y)(xy+1)}{(x^2-1)(y^2-1)(x-y)}=\frac{(xy+1)}{(x^2-1)(y^2-1)}$$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $[0,1[$.

لدينا $0 \le x < 1$ و $0 \le y < 1$ ومنه $0 \le xy < 1$ إذن $1 < xy + 1 < 2$

و بما ان $0 \le x < 1$ فإن $0 \le x^2 < 1$ ومنه $x^2 - 1 < 0$ و كذلك $y^2 - 1 < 0$ ومنه $\dfrac{(xy+1)}{(x^2-1)(y^2-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $[0,1[$

** ليكن x و y ينتميان إلى المجال $]1,+\infty[$.

لدينا $x > 1$ و $y > 1$ ومنه $xy > 1$ إذن $xy + 1 > 2$.

بما أن $x > 1$ فإن $x^2 > 1$ ومنه $x^2 - 1 > 0$ وكذلك $y^2 - 1 > 0$ ومنه $\dfrac{(xy+1)}{(x^2-1)(y^2-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]1,+\infty[$.

4 – جدول تغييرات الدالة f

** أولا نضع جدول تغييرات الدالة f على $[0,1[\cup]1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	||	$\nearrow$	

الدالة f تزايدية على المجال $[0,1[$ و تزايدية على المجال $]1,+\infty[$ و $f(0) = 0$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

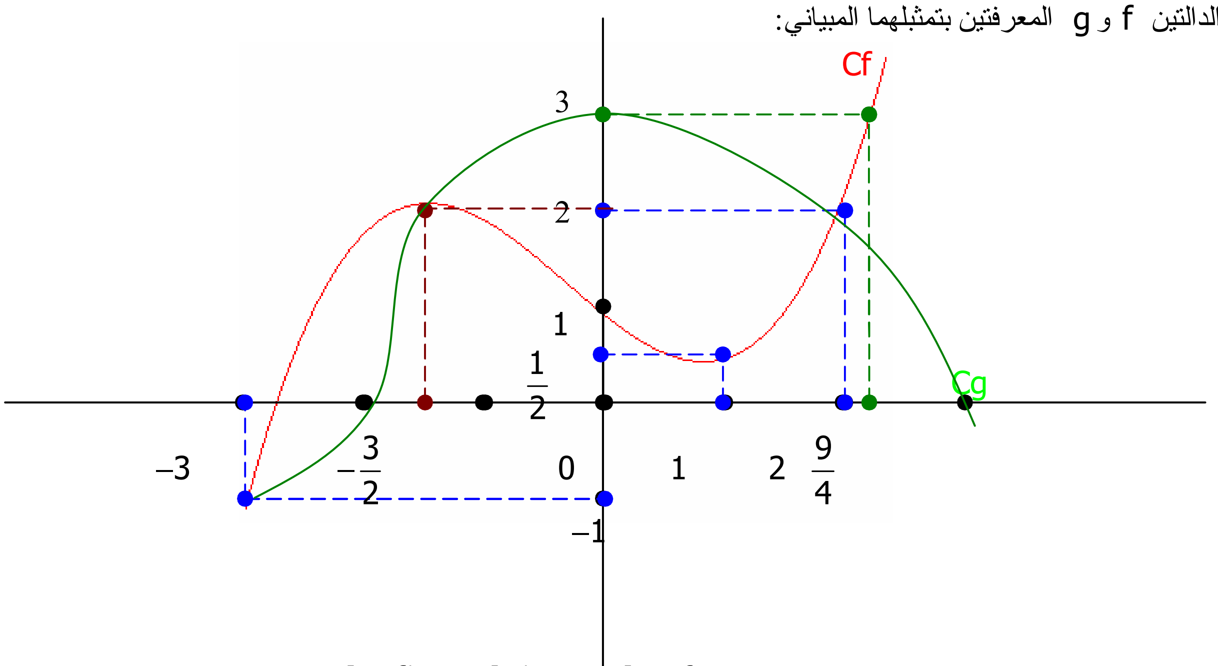
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	||	$\searrow$	0	$\nearrow$	||	$\nearrow$	

بما أن الدالة f تزايدية على المجال $]1,+\infty[$ و نعلم أن الدالة f زوجية فإنها تناقصية على $]-\infty,-1[$.

و بما أن الدالة f تزايدية على المجال $[0,1[$ و نعلم أن الدالة f زوجية فإنها تناقصية على $]-1,0]$.

تمرين رقم 3 :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بتمثيلهما المبياني:



1 – حدد مبيانيا : $f\left(\frac{9}{4}\right)$ و $f(-3)$ و $f(1)$ و $g(0)$ و $g(-2)$

2 – حل مبيانيا المعادلة : $f(x)=2$.

3 – حل مبيانيا المتراجحة : $f(x)>2$.

4 – حل المعادلة : $f(x)=g(x)$.

5 – حل المتراجحة $f(x)<g(x)$.

الحل :

1 – ** بما أن التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطة التي إحداتياثها هما العددين : $\left(\frac{9}{4},3\right)$ فإن : $f\left(\frac{9}{4}\right)=3$.

** بما أن التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطة التي إحداتياثها هما العددين : $(-3,-1)$ فإن : $f(-3)=-1$.

** بما أن التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطة التي إحداتياثها هما العددين : $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ فإن : $f(1)=\frac{1}{2}$.

** بما أن التمثيل المبياني للدالة g يمر من النقطة التي إحداتياثها هما العددين : $(0,3)$ فإن : $g(0)=3$.

** بما أن التمثيل المبياني للدالة g يمر من النقطة التي إحداتياثها هما العددين : $(-2,0)$ فإن : $g(-2)=0$.

2 – بما أن المستقيم الذي معادلته $y=2$ (أفقي) يقطع التمثيل المبياني للدالة f في نقطتين إحداتياثهما $(2,2)$ و $\left(\frac{-3}{2},2\right)$

فإن : $f(2)=2$ و $f\left(\frac{-3}{2}\right)=2$ و بالتالي : حلي المعادلة هما العددان 2 و $\frac{-3}{2}$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

3 – حل مبانيا المتراجحة $f(x)>2$ يعني تحديد المجالات التي يكون فيها التمثيل المبياني للدالة f فوق المستقيم الذي معادلته $y=2$.

و بما ان التمثيل المبياني ل f يوجد فوق المستقيم $y=2$ في المجال $]2,+\infty[$ فإن حل المتراحجة هو المجال $]2,+\infty[$.

4 – حل المعادلة $f(x)=g(x)$ هو تحديد نقط تقاطع التمثيلين المبيانيين للدالتين f و g .

بما أن التمثيلين المبيانيين للدالتين f و g يتقاطعان في ثلاث نقط إحداثياتها هي : $(2,2)$ و $\left(\frac{-3}{2},2\right)$ و $(-3,-1)$

فإن حل المعادلة $f(x)=g(x)$ هي الأعداد : 2 و $\frac{-3}{2}$ و -3 .

5 – حل المتراجحة $f(x)<g(x)$ هو البحث عن المجالات التي يكون فيها التمثيل المبياني للدالة f تحت التمثيل المبياني للدالة g .

نلاحظ مبيانيا أن التمثيل المبياني للدالة f يوجد فوق التمثيل المبياني للدالة g في المجالين $\left[-3,\frac{-3}{2}\right]$ و $[2,3]$

و يوجد تحته في المجال $\left[\frac{-3}{2},2\right]$.

إذن حل المتراجحة $f(x)<g(x)$ هو المجال $\left]\frac{-3}{2},2\right[$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

تمرين رقم 4 :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $f(x)=-2x^2+8|x|-6$. و (C_f) منحنى الدالة في معلم متعامد ممنظم .

1 – أدرس زوجية الدالة f على D_f .

2 – بين أن الدالة f تقبل قيمة قصوى عند 2 في المجال $[0,+\infty[$.

3 – أدرس رتابة الدالة f على المجالين $[0,2]$ و $[2,+\infty[$.

4 – حدد تقاطع (C_f) و محوري المعلم في المجال $[0,+\infty[$.

5 – ضع جدول تغييرات الدالة f على D_f .

6 – أدرس حسب قيم البارامتر m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

الحل :

1 ـ لدينا : $D_f = \mathbb{R}$.

** لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$.

** لدينا : $f(-x) = -2(-x)^2 + 8|-x| - 6 = -2x^2 + 8|x| - 6 = f(x)$.

إذن الدالة f دالة زوجية على D_f .

2 ـ لنبين أن الدالة f تقبل قيمة قصوى عند 2 في المجال $[0,+\infty[$ يكفي أن نبين أن $f(x) \leq f(2)$ لكل x من المجال $[0,+\infty[$.

لدينا : $f(2) = -2(2)^2 + 8|2| - 6 = -8 + 16 - 6 = 2$.

ليكن x من المجال $[0,+\infty[$.

لدينا :
$$f(x) - f(2) = \left(-2x^2 + 8|x| - 6\right) - 2 = -2x^2 + 8x - 6 - 2$$
$$= -2x^2 + 8x - 8 = -2\left(x^2 - 4x + 4\right) = -2(x-2)^2 \leq 0$$

ومنه فإن : $f(x) \leq f(2)$ لكل x من المجال $[0,+\infty[$ إذن الدالة f تقبل قيمة قصوى عند 2 في المجال $[0,+\infty[$

3 ـ لدراسة الرتابة نحسب معدل تغير الدالة f .

** ليكن x و y عددان مختلفان من المجال $[0,+\infty[$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\left(-2x^2+8x-6\right)-\left(-2y^2+8y-6\right)}{x-y} = \frac{-2x^2+2y^2+8x-8y}{x-y}$$
$$= \frac{-2\left(x^2-y^2\right)+8(x-y)}{x-y} = \frac{-2(x-y)(x+y)+8(x-y)}{x-y} = -2(x+y)+8$$

ومنه : $$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = -2(x+y)+8$$

** في المجال $[2,+\infty[$.

لدينا $x \geq 2$ و $y \geq 2$ إذن $x+y \geq 4$ ومنه $-2(x+y) \leq -8$ و بالتالي $-2(x+y)+8 \leq 0$

إذن $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$ ومنه الدالة تناقصية على المجال $[2,+\infty[$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

** في المجال $[0,2]$.

لدينا $x \leq 2$ و $y \leq 2$ إذن $x+y \leq 4$ ومنه $-2(x+y) \geq -8$ و بالتالي $-2(x+y)+8 \geq 0$

إذن $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$ ومنه الدالة تزايدية على المجال $[0,2]$.

4 ـ لنحدد تقاطع (C_f) و محوري المعلم في المجال $[0,+\infty[$.

** التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x) = 0$.

ليكن x من المجال $[0,+\infty[$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x - 6 = 0$ مميز المعادلة $\Delta = 8^2 - 4\times(-2)\times(-6) = 64 - 48 = 16$

المعادلة تقبل حلين مختلفين : $x_1 = \frac{-8+\sqrt{16}}{2\times(-2)} = \frac{-8+4}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$ و $x_2 = \frac{-8-\sqrt{16}}{2\times(-2)} = \frac{-8-4}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في النقطتين $A(1,0)$ و $B(3,0)$.

** التقاطع مع محور الأراتيب نحسب $f(0)$.

بما أن $f(0) = -6$ فإن (C_f) يقطع محور الأراتيب في النقطة $C(0,-6)$.

5 ـ جدول تغييرات الدالة f

نتيجة السؤال 3 : الدالة f تناقصية على المجال $[2,+\infty[$ و تزايدية على المجال $[0,2]$.

نتيجة السؤال 1 : الدالة f زوجية ومنه : الدالة f تزايدية على المجال $]-\infty,-2]$ و تناقصية على المجال $[-2,0]$.

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr