L'expression du vecteur accélération dans le repère de Frenet est: $\vec{a}_G = a_t \,.\vec{u} + a_n.\vec{n}$

$a_t = \frac{dv}{dt}$: la composante tangentielle du vecteur accélération

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$: la composante normale du vecteur accélération

ρ : est le rayon de courbure de la trajectoire au point M. (Si la trajectoire est un cercle $\rho = R$ (rayon du cercle).

II- Les lois de Newton :

1) Les forces intérieures et les forces extérieures:

Après avoir précisé le système étudié **:**
-On appelle forces extérieures, les forces qui s'exercent sur le système par des corps qui n'appartiennent pas au système.
-On appelle forces intérieures, les forces qui s'exercent sur le système par des corps qui appartiennent pas au système.
Remarque: Un système est dit isolé s'il n'est soumis à aucune force extérieure.
Un système est dit pseudo-isolé si les force extérieure auquel il est soumis se compensent.

2) La première loi de Newton :Principe d'inertie:

Dans un repère galiléen, si la somme des forces qui s'exercent sur un corps est nulle, alors le vecteur vitesse de son centre d'inertie est constant.

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_G = C^{te}$$

Donc le centre d'inetie du corps est:
-Soit au repos.
- Soit en mouvement rectiligne uniforme.

Remarque: Le repère de Copernic est le meilleur repère galiléen (son origine est le soleil et ses trois axes son dirigés vers trois étoiles fixes).
Tout repère en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copenic est considéré galiléen, donc tous les repères terrestres peuvent être considérés galiléen pendant des intevalles de temps courts.

3) La deuxième loi de Newton:

Dans un repère galiléen la somme des vecteurs forces qui s'exercent sur un corps est égale au produit de la masse du corps et du vecteur accélération de son centre d'inertie.

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G$$

4) La troisième loi de Newton : principe de l'action et de la réaction.

Lorsqu'il y'a interaction entre deux corps A et B , le corps A exerce une force $\vec{F}_{A/B}$ sur le corps B et le corps B exerce une force $\vec{F}_{B/A}$ sur le corps A , ces deux forces sont telles que: $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$

III-Le mouvement rectiligne uniforme et le mouvement rectiligne uniformément varié:

Généralement le repère utilisé pour étudier les mouvement rectiligne est un axe (O,x) confondu avec la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement et dans ce cas le vecteur position : $\overrightarrow{OG} = x.\vec{i}$ et la vitesse du mobile s'écrit $v = \frac{dx}{dt}$

et son accélération $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

1)Le mouvement rectiligne uniforme :

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par :

- **Une trajectoire rectiligne .**
- **Une accélération nulle a=0.**
- **Une vitesse constante v=C^{te}.**
- **L'équation horaire du mouvement est :** $x = v.t + x_o$ **(x_o: abscisse à l'origine)**

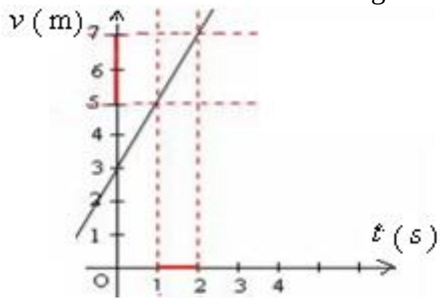
2) Le mouvement rectiligne uniformément varié :

Le mouvement rectiligne uniformément varié est caractérisé par :

- **Une trajectoire rectiligne .**
- **Une accélération constante a=C^{te}**
- **L'équation horaire du mouvement est :** $x = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_o.t + x_o$ **(x_o: abscisse à l'origine)**
- **L'équation de la vitesse :** $v = a.t + v_o$

Dans ce cas la vitesse en fonction du temps est une fonction affine, son coefficient directeur est égal à l'accélération.

<u>Exemple</u>: On donne la représentation de la vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme en fonction du temps.



Déterminer l'accélération et la vitesse initiale puis donner l'équation de la vitesse.

………réponse………………..

$v = 2.t + 3$ et :v_o=3m/s d'où l'équation de la vitesse : $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{7-5}{2-1} = 2m/s$

III- Application de la deuxième loi de Newton :

En général la 2ème loi de Newton sert à déterminer la nature du mouvement du centre d'inertie d'un mobile connaissant les forces qui s'appliquent sur lui.

Pour résoudre un problème de dynamique en utilisant la deuxième loi de Newton on doit toujours suivre les étapes suivantes:

1) On précise le système étudié.
2) On fait le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur ce système.
3) On représente ses forces.
4) On écris la relation vectorielle de la 2ème loi de Newton $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$
5) Puis on projète cette relation après avoir choisi un repère orthonormé convenable lié à un référentiel Galiléen.

1) Application 1:Cas du mouvement sur un plan horizontal sans frottement:

On considère un corps solide S en mouvement sur un plan horizontal sans frottement sous l'action d'une force constante $\vec{F}$ comme l'indique la figure suivante:

On donne : la masse du corps : m=500g l'accélération de pesanteur g=10m/s^2 et F=2N.

1) En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer l'accélération du corps S.

2) Sachant que le corps part du point d'abscisse x =-5cm à t=0 avec une vitesse égale à 3m/s , donner l'équation horaire de son mouvement.

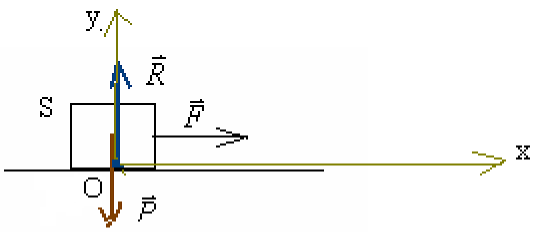
……………………réponses…………………………..

1) • <u>L e système étudié</u> :{le corps S}

• Bilan des forces: le corps S est soumis à l'action des forces suivantes:

- $\vec{P}$: poids du cops.
- $\vec{F}$: la force de traction
- $\vec{R}$: la réaction du plan perpendiculaire au plan car le contact se fait sans frottements.

• <u>Représentation des forces</u>:



• <u>En appliquant la 2ème loi de Newton</u> : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \Rightarrow$ **(1)** $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$

•On considère le référentiel terrestre supposé Galiléen auquel on associe un repère (O, x , y) et <u>on projète la relation (1)</u> dans ce repère.

$\begin{cases} F_x + P_x + R_x = m.a_x \\ F_y + P_y + R_y = m.a_y \end{cases}$ a_y=0 car il n'ya pas de mouvement selon l'axe oy .donc $\begin{cases} F + 0 + 0 = m.a_x \\ 0 - P + R = 0 \end{cases}$ d'où: $\begin{cases} a_x = \dfrac{F}{m} = \dfrac{2}{500.10^{-3}} = 4m/s^2 \\ a_y = 0 \end{cases}$

……

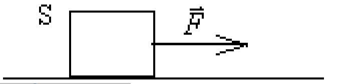
2) La trajectoire est rectiligne et l'accélération est constante selon ox , donc le mouvement est rectiligne uniformément varié.

d'équation horaire: $x = \dfrac{1}{2}.a.t^2 + v_o.t + x_o$ donc: $x = 2.t^2 + 3.t - 0{,}05$ car a=a_x=4m/s v_o=3m/s et x_o=-5cm=-0.05m

2) Application 2:Cas du mouvement sur un plan horizontal avec frottement:

On considère le corps solide S précédent en mouvement sur un plan horizontal(avec frottement) sous l'action d'une force $\vec{F}$

et son accélération devient $6 m/s^2$.



On donne : la masse du corps : m=500g $g=10m/s^2$ F=5N.

1)En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer l'intensité de la réaction du plan. $\vec{R}$

2)Déterminer le coefficient de frottement puis en déduire la valeur de l'angle de frottement.

3) Sachant que le corps part du point d'abscisse x=0 à t=0 avec une vitesse égale à 1m/s , donner l'équation horaire de son mouvement.

……………………réponses……………………………

1) • L e système étudié :{le corps S}

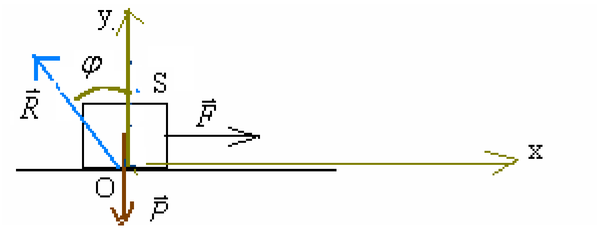
- Bilan des forces: le corps S est soumis à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{F}$: la force de traction .

$\vec{R}$: la réaction du plan incliné dans le sens contraire du mouvement faisant angle frottements φ avec la verticale

• <u>Représentation des forces</u>:



• En appliquant la $2^{ème}$ loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \Rightarrow$ **(1)** $\vec{F}+\vec{P}+\vec{R} = m.\vec{a}_G$

• On considère le référentiel terrestre supposé Galiléen auquel on associe un repère (O, x , y) et on projète la relation (1) dans ce repère.

$$\begin{cases} F_x + P_x + R_x = m.a_x \\ F_y + P_y + R_y = m.a_y \end{cases}$$ $a_y=0$ car il n'ya pas de mouvement selon l'axe oy donc : $$\begin{cases} F + 0 - R_T = m.a_x \\ 0 - P + R_N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_T = F - m.a_x = 5 - 0{,}5\times 6 = 2N \\ R_N = P = m.g = 0{,}5\times 10 = 5N \end{cases}$$

on a: $R^2 = R_T{}^2 + R_N{}^2 \Rightarrow R = \sqrt{R_T{}^2 + R_N{}^2} = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}38N$

……

2) le coefficient de frottement : $k = \tan\varphi = \dfrac{R_T}{R_N} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$ l'angle de frottement : $\varphi = \tan^{-1}(0{,}4) = 21{,}8^o$

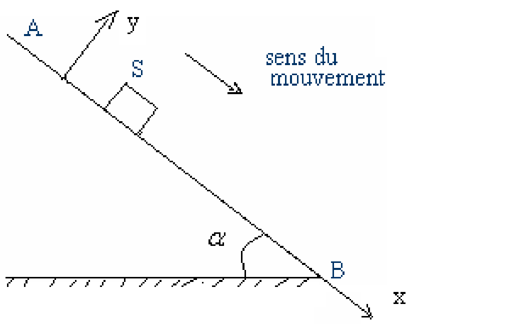
……

3) La trajectoire est rectiligne et l'accélération est constante selon ox ,donc le mouvement est <u>rectiligne uniformément varié</u>.

d'équation horaire: $x = \dfrac{1}{2}.a.t^2 + v_o.t + x_o$ donc: : $x = 3.t^2 + t$ car $a=a_x=6m/s$ $v_o=1m/s$ et $x_o=0$.

<u>3) Application 3:Cas du mouvement sur un plan incliné sans frottement:</u>

On libère un corps S de masse m=80kg sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^o$ par rapport à l'horizontale et il glisse sans frottement vers le bas (voir figure).



1) En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer les coordonnées du vecteur accélération dans le repère (O,x,y) associé à un référentiel terrestre supposé Galiléen. puis déterminer l'intensité de la réaction du plan incliné.

2) Sachant que le corps S part à l'instant t=0 du point A avec une vitesse v_A= 5m/s (A est confondu avec l'origine O du repère d'espace).

. 2-1- donner l'équation horaire du mouvement de S selon l'axes(o,x) puis l'équation de sa vitesse .

2-2-Déterminer sa vitesse au point B (on donne AB=2m $g=10m/s^2$) .

……………………réponses……………………………

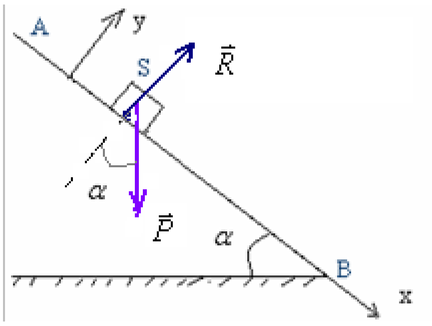
1) • L e système étudié :{le corps S}

- Bilan des forces: le corps S est soumis à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{R}$: la réaction du plan perpendiculaire au plan car le contact se fait sans frottements. .

• Représentation des forces:



• En appliquant la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \Rightarrow$ **(1)** $\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$

• En projetant la relation (1) dans le repère (O, x , y) on a:

$\begin{cases} P_x + R_x = m.a_x \\ P_y + R_y = m.a_y \end{cases}$ avec $a_y=0 \Rightarrow \begin{cases} +P.\sin\alpha + 0 = m.a_x \\ -P.\cos\alpha + R = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} m.g\sin\alpha = m.a_x \\ -P.\cos\alpha + R = 0 \end{cases}$ d'où: $\begin{cases} a_x = g.\sin\alpha = 10.\sin 30 = 5m/s^2 \\ a_y = 0 \end{cases}$

et on a : $R = P\cos\alpha = m.g.\cos\alpha = 80\times10\times\cos30 = 692{,}8N$

....

2) 2-1-: donc le mouvement est uniformément varié selon l'axe ox , $a_x = 5m/s$,son équation horaire :

$x = \frac{1}{2}.a_x.t^2 + v_{ox}.t + x_o \Rightarrow$. $x = 2{,}5..t^2 + 5.t$ car a_x=5m/s v_{ox}=5m/s et x_o=0

L'équation de la vitesse : $v = a.t + v_o \Rightarrow v = 5t + 5$

....

2-2- au point B ona : $x_B = AB = 2m$

D'après les equations du mouvement on a : $\begin{cases} x_B = 2{,}5.t^2 + 5t \\ v_B = 5.t + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2{,}5.t^2 + 5t \\ v_B = 5.t + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2{,}5.t^2 + 5t - 2 = 0 \\ v_B = 5.t + 5 \end{cases}$ donc

$2{,}5..t^2 + 5.t - 2 = 0$ donc : $\Delta = 5^2 - (-4\times2{,}5\times2) = 45$ or t>0 la solution : $t = \frac{-5+\sqrt{45}}{2\times2{,}5}$ la 2ème solution est négative

En remplaçant dans l'expression de la vitesse on a: $v_B = 5t + 5 = 5\times\left(\frac{-5+\sqrt{45}}{5}\right) + 5 = \sqrt{45} = 6{,}7m/s$

Autre méthode :

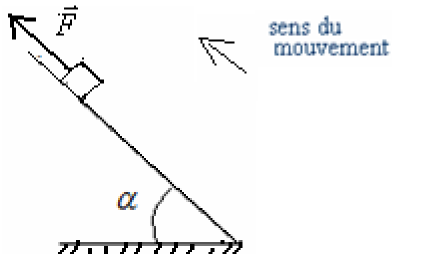
En appliquant le théorème d'énergie cinétique entre A et B.

$\Delta E_{c\,A\to B} = \Sigma W\vec{F}_{A\to B} \Rightarrow Ec_B - Ec_A = W\vec{P}_{A\to B} + W\vec{R}_{A\to B} \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v_B{}^2 - \frac{1}{2}.m.v_A{}^2 = m.g.AB.\sin\alpha + 0$ donc:

$v_B{}^2 = v_A{}^2 + 2.g.AB.\sin\alpha$: d'où : $v_B = \sqrt{v_A{}^2 + 2.g.AB.\sin\alpha} = \sqrt{5^2 + 2\times10\times2\times0{,}5} = 6{,}7m/s$

4) Application 4:Cas du mouvement sur un plan incliné avec frottement:

On tire un corps S de masse m=100kg sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 10^o$ par rapport à l'horizontale par un câble et il glisse vers le haut(voir figure).



Sachant que le contact se fait avec frottement et que le coefficient de frottement est k=0,25 et son accélération selon l'axe ox est a_x=2m/s^2 .

1) En appliquant la deuxième loi de Newton déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$ du plan.

2) Déterminer l'intensité de la force de traction $\vec{F}$ exercée par le câble sur le corps S. on donne g=10m/s^2

........................**réponses**...............................

1) • L e système étudié :{le corps S}

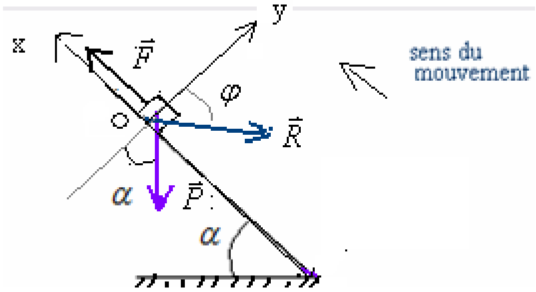
• Bilan des forces: le corps S est soumis à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: son poids

$\vec{F}$: la force de traction.

$\vec{R}$: la réaction du plan incliné dans le sens contraire du mouvement faisant angle frottements φ avec la verticale.

• Représentation des forces:



• En appliquant la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \Rightarrow$ **(1)** $\vec{P}+\vec{R}+\vec{F} = m.\vec{a}_G$

• En projetant la relation (1) sur l'axe (O, y) on a:

$P_y + R_y + \vec{F}_y = m.a_y \Rightarrow -P.\cos\alpha + R_N + 0 = 0$ donc: $R_N = m.g.\cos\alpha = 100\times 10.\cos 10 = 984{,}8N$

Et on a : $k = \tan\varphi = \dfrac{R_T}{R_N} \Rightarrow R_T = k.R_N = 0{,}25\times 984{,}8 = 246{,}2N$

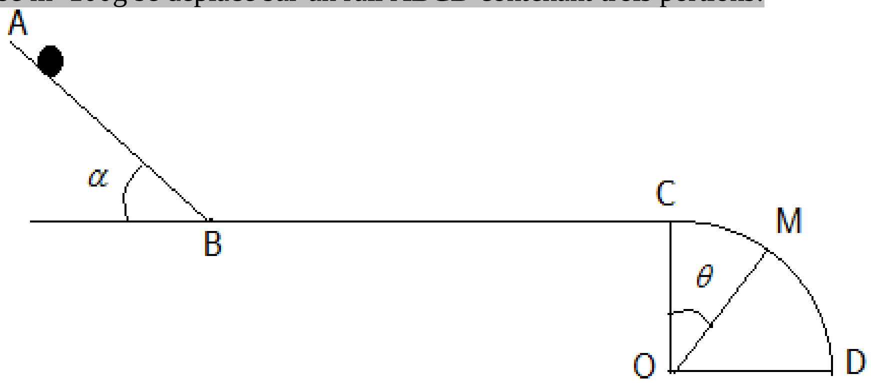
....

2) • En projetant la relation (1) sur l'axe (O,x) on a $P_x + R_x + \vec{F}_x = m.a_x$ donc: $-P.\sin\alpha - R_T + F = m.a_x \Rightarrow$:

$F = m.g\sin\alpha + R_T + m.a_x = 100.10^{-3}\times 10..\sin 10 + 246{,}2 + 100.10^{-3}\times 2 \approx 246{,}6N$

5) Application 5:Cas d'un mouvement curviligne (utilisation du repère de Frenet):

Un corps solide S de masse m=100g se déplace sur un rail ABCD contenant trois portions:



-La portion AB est inclinée d'un angle sur laquelle le mouvement se fait sans frottement . AB=90cm $\alpha = 30^o$

- La portion BC est rectiligne .BC=2m
- La portion CD est circulaire de centre O et de rayon r sur laquelle le mouvement se fait sans frottement.

1) Le corps S part du point A sans vitesse initiale.

1-1- Déterminer l'accélération du corps S sur la portion AB puis en déduire la nature du mouvement . on prend g=10m/s^2

1-2-Déterminer la vitesse v_B du corps S au point B.

2) Sachant que le corps S s'arrête au point C.

sachant qu'il y'a frottement et que la force de frottement est f=0,225N.

3) Le corps S continue son mouvement sur le rail CD.

3-1- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre C et M , montrer que l'expression de la vitesse du mobile au point M s'écrit : $v = \sqrt{2.g.r(1-\cos\theta)}$

3-2- Représenter au point M le repère de Frenet $(M,\vec{u},\vec{n})$ et les forces qui s'exercent sur le corps.

3-3-En appliquant la deuxième loi de Newton sur le corps S au point M et par projection sur la normale $(M,\vec{n})$ monter que l'intensité de la réaction exercée par le plan de contact sur S est : $R = m.g(3\cos\theta - 2)$.

3-4- Sachant que le corps quitte le rail au point M_o repéré par l'angle θ_o .Déterminer la valeur de θ_o .

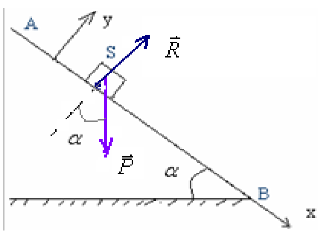
……………………réponses……………………………

1)1-1- Sur la portion AB le système étudié {le corps S} est soumis à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{R}$: la réaction du plan perpendiculaire au plan car le contact se fait sans frottements.

• <u>Représentation des forces</u>:



• En appliquant la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \Rightarrow$ **(1)** $\vec{P}+\vec{R} = m.\vec{a}_G$

• On choisi un repère (O,x,y) son origine est confondu avec le point de départ A du mobile considéré Galiléen.

● En projetant la relation (1) sur l'axe(O,x) on a:

$P_x + R_x = m.a_x \Rightarrow +P.\sin\alpha + 0 = m.a_x$ d'où $a_x = g.\sin\alpha = 10.\sin 30 = 5m/s^2$ Le mouvement est rectiligne uniformément varié (accéléré).

1-2-Le mouvement étant rectiligne uniformément varié selon l'axe (O,x) d'accélération a_x= 5m/s^2

donc l'équation horaire du mouvement est $v = a.t + v_o$ et celle de la vitesse est: $x = \frac{1}{2}.a.t^2 + v_o.t + x_o$

Or l'origine est confondu avec le point de départ A du mobile x_o=0 et la vitesse initiale est nulle vo=0 donc on a:

$\begin{cases} x = 2{,}5.t^2 \\ v = 5.t \end{cases}$ et lorsque le mobile arrive au point B $\begin{cases} x_B = 2{,}5.t_B{}^2 \\ v_B = 5.t_B \end{cases}$ avec x_B=AB $\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{\dfrac{AB}{2{,}5}}. \\ v_B = 5.\sqrt{\dfrac{0{,}9}{2{,}5}} = 3m/s \end{cases}$

Remarque : on peut répondre à cette question en appliquant le théorème d'énergie cinétique entre A et B.

$\Delta E_{c\,A\to B} = \Sigma W\vec{F}_{A\to B} \Rightarrow Ec_B - Ec_A = W\vec{P}_{A\to B} + W\vec{R}_{A\to B} \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v_B{}^2 - \frac{1}{2}.m.v_A{}^2 = m.g.AB.\sin\alpha + 0$ donc:

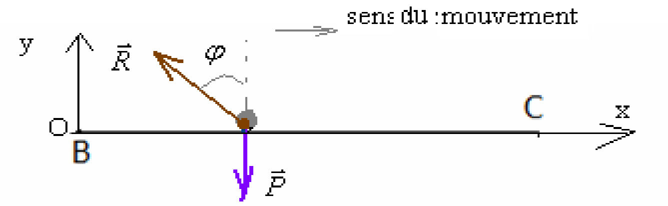
$v_B{}^2 = v_A{}^2 + 2.g.AB.\sin\alpha$ avec v_A=0 : d'où : $v_B = \sqrt{2.g.AB.\sin\alpha} = \sqrt{2\times 10\times 0{,}9\times 0{,}5} = 3m/s$

2)2-1- le système étudié {le corps S} sur le trajet BC , il est soumis à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{R}$.: la réaction du plan incliné dans le sens contraire du mouvement faisant angle frottements φ avec la verticale

• Représentation des forces:



• En appliquant la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \Rightarrow$ **(1)** $\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$

● En projetant la relation (1) sur l'axe(O,x) on a:

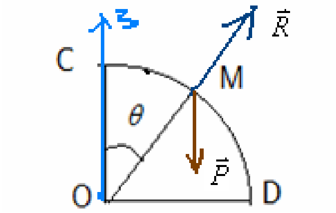
$P_x + R_x = m.a_x \Rightarrow 0 - f = m.a_x$ d'où: $a_x = \dfrac{-f}{m} = \dfrac{-0{,}225}{0{,}1} = -2{,}25m/s^2$

Nature du mouvement: Le mouvement est rectiligne uniformément varié : retardée.

3).3-1- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre C et M , le corps étant soumis à l'action de deux forces :

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{R}$: la réaction du plan perpendiculaire au plan car le contact se fait sans frottements. .

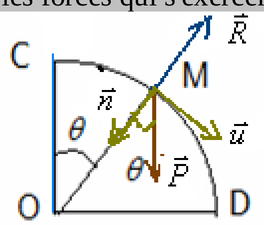


$\Delta E_{c\,C\to M} = \Sigma W\vec{F}_{C\to M} \Rightarrow Ec_M - Ec_C = W\vec{P}_{C\to M} + W\vec{R}_{C\to M}$ avec : $W\vec{R}_{C\to M} = 0..et..v_C = 0 \Rightarrow Ec_M = W\vec{P}_{C\to M}$

$\frac{1}{2}.m.v_M{}^2 = m.g.(z_M - z_C)$ $z_M = r\cos\theta$ avec : z_C=r et : $\frac{1}{2}.m.v_M{}^2 = m.g.r(1-\cos\theta)$ donc on a:

$\Rightarrow .v_M = 2..g.r(1-\cos\theta)$ d'où: $v_M = \sqrt{2.g.r(1-\cos\theta)}$

3-2- Représentons au point M le repère de Frenet et les forces qui s'exercent sur le corps .



3-3-En appliquant la deuxième loi de Newton sur le corps S au point M

- le système étudié {le corps S} au point M, il est soumis à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{R}$: la réaction du plan perpendiculaire au plan car le contact se fait sans frottements.

- En appliquant la 2ème loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G \quad \Rightarrow$ **(1)** $\vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$
- En projetant la normale $(M,\vec{n})$ dans le repère de Frenet: $+P.\cos\theta - R = m.a_n$ et au point M on a: $a_n = \dfrac{v_M^{\;2}}{r}$

donc: $m.g.\cos\theta - R = m.\dfrac{v_M^{\;2}}{r} \Rightarrow R = m.g.\cos\theta - m.\dfrac{v_M^{\;2}}{r}$ et d'après la question 3-1 on a : $v_M^{\;2} = 2.g.r(1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} & R = m.g.\cos\theta - m.\frac{2.g.r(1-\cos\theta)}{r} = m.g\cos\theta - 2.m.g(1-\cos\theta) = m.g\cos\theta - 2.m.g + 2.m.g\cos\theta = \\ & = 3m.g\cos\theta - 2.m.g = m.g(3\cos\theta - 2.) \end{aligned}$$

donc: $R = m.g(3\cos\theta - 2.)$

....

3-4- Lorsque le corps quitte le rail , la réaction du plan est nulle $\Rightarrow \quad m.g(3\cos\theta - 2.) = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 0$

$3\cos\theta - 2 = 0$ donc : $\cos\theta = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) = 48^o$

--------------- **SBIRO Abdelkrim** lundi 18 février 2019