Les oscillations mécaniques

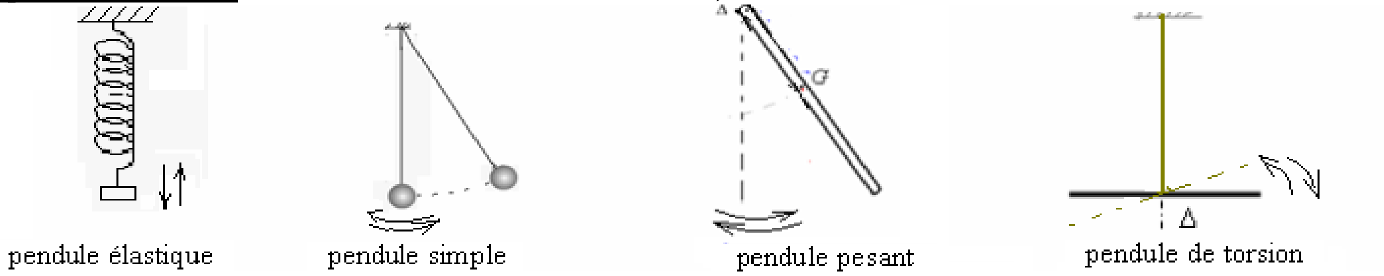
madariss.fr

I-Systèmes mécaniques oscillants:

1) Exemples de quelques oscillateurs mécaniques:

On donne quelques exemples de systèmes mécaniques oscillants:

- **Le pendule élastique** : il est constitué d'un corps solide de masse m suspendu à un resort à spires non jointives.
- **Le pendule simple** : il est constitué d'un corps solide de masse m suspendu à l'extremité d'un fil inextensible.
- **Le pendule pesant:** est tout corps solide mobile autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité
- **Le pendule de torsion:** est constitué d'une barre horizontale, fixée à l'extremité d'un fil de torsion.

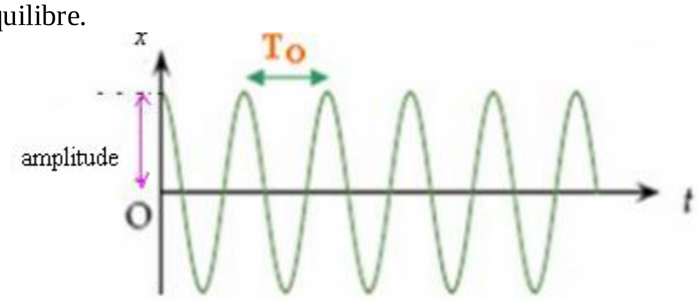


D'une façon générale un oscillateur mécanique , effectue des oscillations autour de sa position d'équilibre .

2) Caractéristiques des mouvements oscillatoires:

Un mouvement oscillatoire est caractérisé par:

- Sa position d'équilibre stable c'est la position à laquelle le système tend à y revenir lorsque l'on en éloigne légèrement.
-Sa période propre : c'est le temps mis pour effectuer une oscillation.
- Son amplitude : c'est la valeur maximale positive que prend la grandeur qui exprime le décalage ou l'inclinaison de l'oscillateur de sa position d'équilibre.



3) Amortissement des oscillations:

a)Définition:

En écartant un pendule élastique de sa position d'équilibre et en le lâchant, l'amplitude des oscillations diminue jusqu'à ce qu'il s'annule: on dit que le mouvement est amorti. Le phénomène d'amortissement est provoqué par les frottements.

Il existe deux types de frottements :

-Le frottement solide qui se fait entre l'oscillateur et un corps solide.

-Le frottement fluide qui se fait entre l'oscillateur et un corps fluide (liquide ou gaz) .

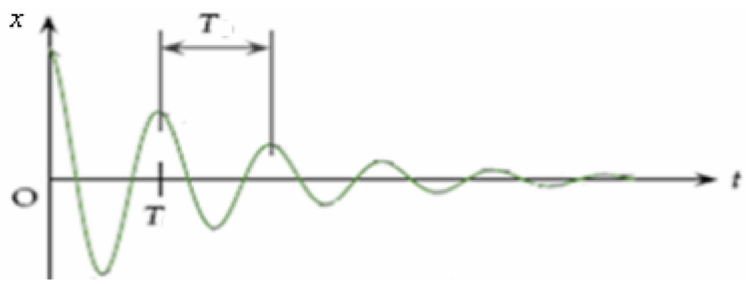
b)Les régimes d'amortissement:

. ■ **Le régime pseudo périodique :** si l'amortissement est faible, l'amplitude des oscillations diminue progressivement jusqu'à ce qu'il s'annule.

T_0: La période propre.

T: La pseudo période

$\boxed{T \approx T_0}$

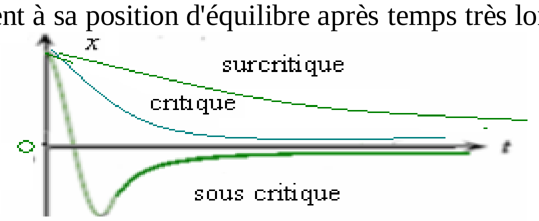


■ **Le régime apériodique** si le frottement est fort les oscillations disparaissent et selon l'importance de l'amortissement on distingue trois régimes:

-**Le régime sous critique :** l'oscillateur effectue une seule oscillation avant de s'arrêter.

-**Le régime critique :** l'oscillateur revient à sa position d'équilibre sans oscillations.

-Le régime surcritique l'oscillateur revient à sa position d'équilibre après temps très long sans oscillations.



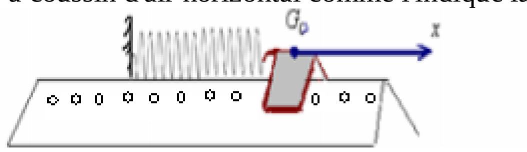
II-Etude de quelques systèmes mécaniques oscillants:

1) LE PENDULE ELASTIQUE:

a)Pendule élastique horizontal:

•Dispositif expérimental:

Il est constitué d'un ressort posé sur un banc à coussin d'air horizontal comme l'indique la figure suivante:



Après avoir mis en marche la soufflerie, on écarte la cavalier horizontalement d'une distance x_m puis on le lâche , il effectue des oscillations non amorties.

• Equation différentielle du mouvement:

- **Le système étudié** {le cavalier}

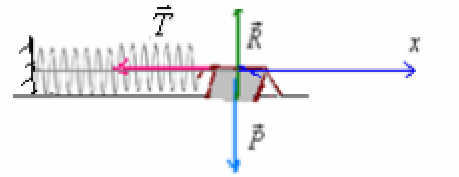
-**Bilan des forces :** Le cavalier lors de son mouvement oscillatoire est soumis à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{R}$:la réaction du banc à coussin d'air (elle est perpendiculaire au plan de contact car les frottements sont négligeables).

$\vec{T}$: la tension du ressort , c'est une force de rappel $\vec{T} = -K.x.\vec{i}$:

(Elle s'oppose toujours à l'allongement du ressort et elle est proportionnelle à cet allongement).



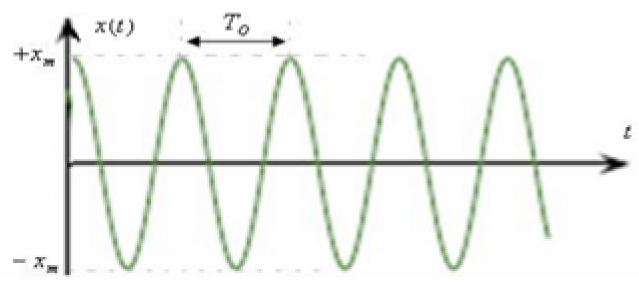
-**Application de la deuxième loi de Newton**: $\Sigma\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad \vec{P}+\vec{R}+\vec{T} = m.\vec{a}_G$

Par projection sur l'axe ox: $0+0-Kx = m.a_x \quad \Rightarrow \quad -Kx = m.\dfrac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad m.\ddot{x}+Kx = 0$

d'où: $\ddot{x}+\dfrac{k}{m}.x = 0$ C'est l'équation différentielle du mouvement

•Solution de l'équation différentielle du mouvement:

La solution de l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x}+\dfrac{K}{m}.x = 0$ est une fonction sinusoïdale qui s'écrit sous la forme suivante: $x = x_m.\cos(\omega_o.t+\varphi)$



$x(t)$: l'élongation qui est une valeur algébrique exprmée en (m).

x_m : l'amplitude : c'est l'élongation maximale exprmée en (m).

φ : la phase du mouvement à l'instant t=0 en (rad)

ω_o : La pulsation propre en (rad/s) $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T_o}$

T_o : La période propre en (s)

• Période propre du mouvement:

Or la solution de l'équation différentielle : $\ddot{x}+\dfrac{K}{m}.x = 0$ est : $x(t) = x_m.\cos(\omega_o.t+\varphi)$

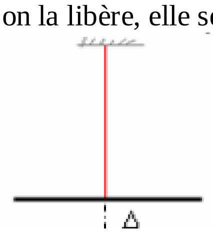
$\dot{x} = -x_m.\omega_o \sin(\omega_o.t+\varphi)$ et : $\ddot{x} = -x_m.\omega_o^2 \cos(\omega_o.t+\varphi) = -\omega_o^2.x(t)$ en remplaçant dans l'équation différentielle: $-\omega_o^2.x+\dfrac{K}{m}.x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega_o^2+\dfrac{K}{m} = 0$ d'où $\omega_o = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$:

La période propre du pendule élastique est : $T_o = \dfrac{2.\pi}{\omega_o}$ donc: $T_o = 2.\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

2) LE PENDULE DE TORSION: (uniquement pour sc.math et sc physique)

a) Moment du couple de torsion:-

Le pendule de torsion est constitué d'un fil de torsion, et d'une tige homogène horizontale fixée en son milieu à l'extrémités de ce fil. L'orsqu'on écarte la tige de sa position d'équilibre et on la libère, elle se met à osciller autour de sa position d'équilibre.



L'action du fil tordu sur la tige est dû à un ensemble de forces auquelles on associe un couple de forces appelé couple de torsion.

Le moment du couple de torsion est : $M_t = -C.\theta$

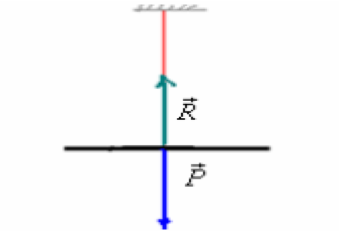
M_t : moment du couple de torsion en (N.m)

C : Constante de torsion en (N.m/rad)

θ :angle de torsion en (rad)

b) Equation différentielle du mouvement:

On écarte la tige de sa position d'équilibre d'un angle θ_m et on la libère sans vitesse initiale.



Bilan des forces qui s'exercent sur la tige :

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{R}$: réaction du fil de suspension.

La somme des forces de torsion dont le moment est : $M_t = -C.\theta$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique : $\Sigma M = J_\Delta.\ddot{\theta} \Rightarrow M\vec{P}_\Delta + M\vec{R}_\Delta + M_t = J_\Delta.\ddot{\theta}$

on a $M\vec{R}_\Delta = 0$ et: $M\vec{P}_\Delta = 0$ donc: $0 + 0 - C.\theta = J_\Delta.\ddot{\theta}$ d'où: $J_\Delta.\ddot{\theta} + C.\theta = 0$

et on obtient l'équation différentielle du mouvement d'un pendule de torsion: $\ddot{\theta} + \dfrac{C}{J_\Delta}.\theta = 0$

c) Solution de l'équation différentielle du mouvement:

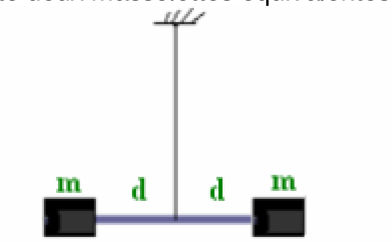
La solution de cette équation différentielle est une fonction sinusoidale qui s'écrit sous la forme suivante :

$\theta = \theta_m.\cos(\omega_o.t + \varphi)$ donc: $\dot{\theta} = -\theta_m.\omega_o \sin(\omega_o.t + \varphi)$ et: $\ddot{\theta} = -\theta_m.\omega_o \cos(\omega_o.t + \varphi) = -\omega_o^2.\theta$

En remplaçant dans l'équation différentielle , on a: $-\omega_o^2.\theta + \dfrac{C}{J_\Delta}\theta = 0 \Rightarrow \omega_o^2 = \dfrac{C}{J_\Delta}$ d'où: $\omega_o = \sqrt{\dfrac{C}{J_\Delta}}$

La période propre du pendule de torsion : $T_o = \dfrac{2.\pi}{\omega_o}$ donc : $T_o = 2.\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta}{C}}$

Remarque : si la tige du pendule de torsion porte deux masselottes équivalentes ayant la même masse (voir figure).

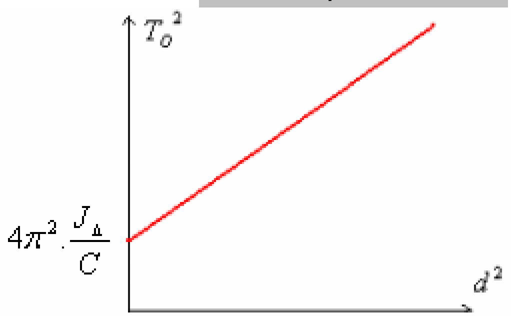


Dans ce cas le moment d'inertie de l'ensemble est : $J'_\Delta = J_\Delta + 2.m.d^2$ et la période propre : $T_o = 2.\pi\sqrt{\dfrac{J_\Delta + 2.m.d^2}{C}}$

donc : $T_o^2 = 4\pi^2.\dfrac{J_\Delta}{C} + .\dfrac{8.\pi^2.m.J_\Delta}{C}.d^2$

La courbe : $T_o^2=f(d^2)$ a pour abscice à l'origine: $4\pi^2.\dfrac{J_\Delta}{C}$.

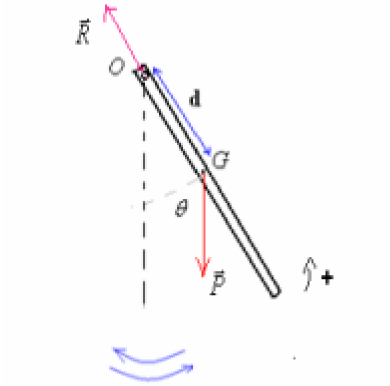
et pour coefficient directeur: $\alpha = \dfrac{\Delta T_o^2}{\Delta d^2} = \dfrac{8.\pi^2.m.J_\Delta}{C}$



3) LE PENDULE PESANT: (uniquement pour sc.math et sc physique)

A) Equation différentielle du mouvement:

On écarte le pendule pesant de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale . Appelons θ l'angle que forme OG avec la ligne verticale passant par O.(voir figure).



Pendant son mouvement, le pendule pesant est soumis à l'action des forces suivantes:

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{R}$: réaction de l'axe de rotation.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique : $\Sigma M\vec{F}_{\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta} \Rightarrow M\vec{P}_{\Delta} + M\vec{R}_{\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$

$\Rightarrow -P.d.\sin\theta = J_{\Delta}.\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{m.g.d}{J_{\Delta}}.\sin\theta = 0$, pour les faibles oscillations dont $\theta < 15^o$ on peut écrire

par approximation : $\sin\theta \approx \theta$ et l'équation différentielle s'écrit : $\ddot{\theta} + \frac{m.g.d}{J_{\Delta}}.\theta = 0$

b) **Solution de l'équation différentielle du mouvement:**

La solution de cette équation différentielle est une fonction sinusoïdale qui s'écrit sous la forme suivante :

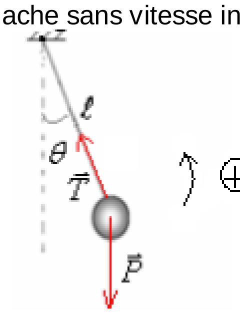
$\theta = \theta_m.\cos(\omega_o.t + \varphi)$ donc: $\dot{\theta} = -\theta_m.\omega_o \sin(\omega_o.t + \varphi)$ et: $\ddot{\theta} = -\theta_m.\omega_o \cos(\omega_o.t + \varphi) = -\omega_o^2.\theta$

En remplaçant dans l'équation différentielle , on $-\omega_o^2.\theta + \frac{m.g.d}{J_{\Delta}}\theta = 0 \Rightarrow \omega_o^2 = \frac{m.g.d}{J_{\Delta}}$ d'où: $\omega_o = \sqrt{\frac{m.g.d}{J_{\Delta}}}$

La période propre du pendule pesant dans le cas des petites oscillations $T_o = \frac{2.\pi}{\omega_o}$ donc : $T_o = 2.\pi\sqrt{\frac{J_{\Delta}}{m.g.d}}$:

4) LE PENDULE SIMPLE: (uniquement pour sc.math et sc physique)

Lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre et on le lache sans vitesse initiale , il oscille autour de sa position d'équibre.



Bilan des forces qui s'éxercent sur le corps :

son poids. $\vec{P}$:

$\vec{T}$:tension du fil.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique : $\Sigma M\vec{F}_{\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta} \Rightarrow M\vec{P}_{\Delta} + M\vec{T}_{\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$

et pour les petite oscillation ona : $\sin\theta \approx \theta$ avec: $J_{\Delta}. = m.\ell^2$ donc: $-P.\ell.\sin\theta + 0 = J_{\Delta}.\ddot{\theta} \Rightarrow$

l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple: $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}.\theta = 0$

b) **Solution de l'équation différentielle du mouvement:**

La solution de cette équation différentielle est une fonction sinusoidale qui s'écrit sous la forme suivante :

$\theta = \theta_m.\cos(\omega_o.t + \varphi)$ donc: $\dot{\theta} = -\theta_m.\omega_o \sin(\omega_o.t + \varphi)$ et: $\ddot{\theta} = -\theta_m.\omega_o \cos(\omega_o.t + \varphi) = -\omega_o^2.\theta$

En remplaçant dans l'équation différentielle , on a : $-\omega_o^2.\theta + \frac{g}{\ell}.\theta = 0$: $\Rightarrow \omega_o^2 = \frac{g}{\ell}$ d'où: $\omega_o = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

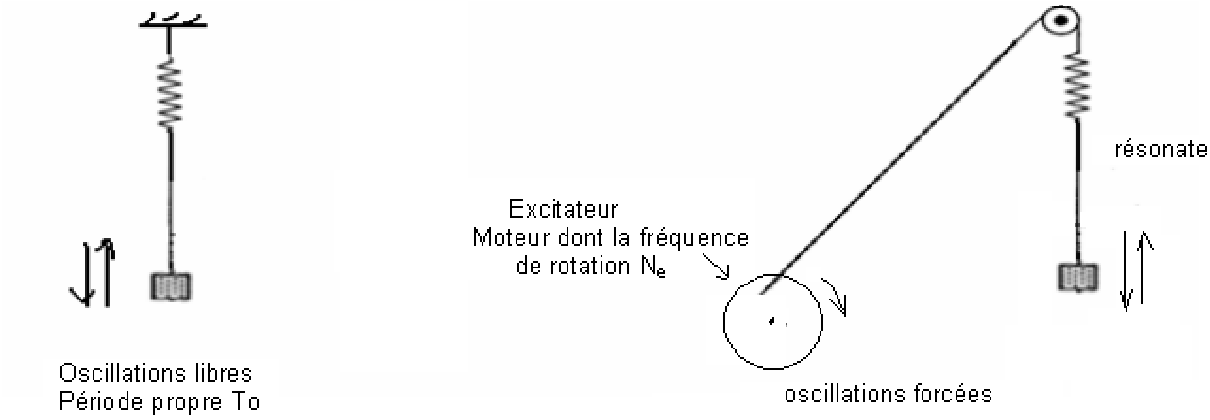
La période propre dans le cas des petites oscillations $T_o = \frac{2.\pi}{\omega_o}$ donc : $T_o = 2.\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

III-Phénomène de résonance mécanique:

1)Les oscillations forcées:

Les frottements agissent sur les oscillations mécaniques et leur mouvement devient amortie. et on peut entretenir leur mouvement en récompensant l'énergie dissipée par une méthode convenable à l'oscillateur.
On lie l'oscillateur avec un appareil qui lui fournit l'énergie nécessaire pour que son mouvement soit entretenu , cet appreil s'appelle : **l'excitateur** qui est un système ayant un mouvement oscillatoire qui impose sa période T_e à l'oscillateur qui s'appelle (**résonateur**) et le mouvement de ce dernier devient forcé.

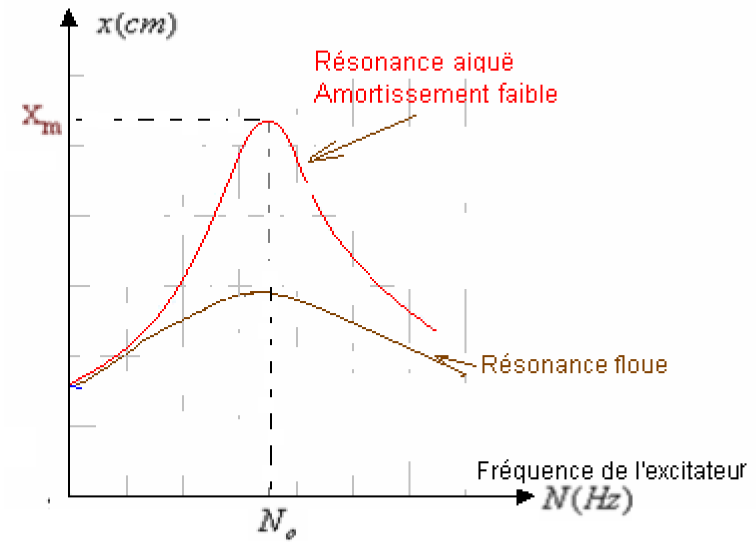
2)Exemple d'oscillations forcées:



Dans cet exemple le pendule joue le rôle du résonateur, sa fréquence propre est N_o alors que le moteur joue le rôle de l'excitateur sa fréquence est N_e.
En liant l'oscillateur mécanique avec le moteur , il s'oblige d'osciller avec une fréquence égale à celle moteur.
En faisant varier la fréquence du moteur on obtient le plus grand amplitude du résonateur lorsque la fréquence du moteur (excitateur) est égale à,la fréquence propre du pendule élastique (résonateur) ,on dit qu'il y'a **résonance**

.(à la résonance N_e=N_o). avec : $N_o = \frac{1}{T_o}$ et $T_o = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{K}}$

Remarque: Si l'amortissement est faible, le phénomène de résonance est plus clair.(aigu)
Si l'amortissement est fort, le phénomène de résonance est flou.(voir figure)

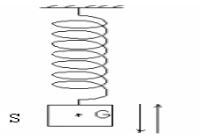


Exercices d'application:

1er Exercice : Pendule élastique vertical:

On considère un pendule élastique vertical constitué d'un ressort de constante de raideur k=20N/m et d'un corps solide de masse m=200g .

On écarte le corps S verticalement vers le bas à partir de sa position d'équilibre d'une distance égale à 3cm et on le lâche sans vitesse initiale.



A l'instant t=0 le corps passe de la position d'équilibre stable G_o dans le sens positif.

1) Déterminer l'allongement du ressort à l'équilibre $\Delta\ell_o$

2) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

3) Donner l'équation horaire du mouvement.

4) Déterminer la période propre du mouvement. On donne g=10N/kg.

....

1) Le système étudié :{le corps S à l'équilibre}

Bilan des forces: à l'équilibre le corps S est soumis à l'action des forces suivantes :

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{T}_o$.: la tension du ressort à l'équilibre.

D'après la condition d'équilibre du corps S on a donc: $T_o = P = m.g \Rightarrow K.\Delta\ell_o = m.g$

$$\Delta\ell_o = \frac{m.g}{K} = \frac{0,2\times 10}{20} = 0,1m = 10cm$$

....

Réponse :

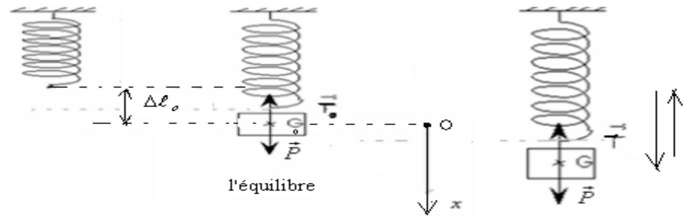
2) -Le système étudié :{le corps S } lorsqu'il effectue des oscillations.

- Bilan des forces: pendant son mouvement le corps S est soumis à l'action des forces suivantes :

$\vec{P}$: son poids.

$\vec{T}$: la tension du ressort .

On considère un repère $(O,\vec{i})$, son origine O est confondu avec le centre d'inertie G_o du corps S à l'équilibre



-**Application de la deuxième loi de Newton**: $\Sigma\vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}_G$

Par projection sur l'axe ox on a: $m.g - K.\Delta\ell_o - K.x = m.a_G$ donc : $m.g - K.(\Delta\ell_o + x) = m.a_G \Rightarrow P - T = m.a_G$

Or d'après la condition d'équilibre : $m.g = K.\Delta\ell_o \Rightarrow m.g - K.\Delta\ell_o = 0$ donc: $-K.x = m.a_G$ d'où: $m.\ddot{x} + K.x = 0$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$ C'est l'équation différentielle du mouvement.

....

3) La solution de l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0$ est: $x = x_m.\cos(\omega_o.t + \varphi)$

D'après les données on a : . $\omega_o = \sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{\frac{0,2}{20}} = 10 rad/s$ et : $x_m = 3cm$

Et d'après les conditions initiales : à t=0 , x=0 donc : et or à t=0 $\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow 0 = x_m.\cos\varphi$

le corps passe de la position d'équilibre stable G_o dans le sens positif v>0 à t=0.

Et on a: $x = x_m.\cos(\omega_o.t + \varphi) \Rightarrow v = \dot{x} = -x_m.\omega_o.\sin(\omega_o.t + \varphi)$ donc à t=0 : $v = -x_m.\omega_o.\sin\varphi > 0 \Rightarrow$

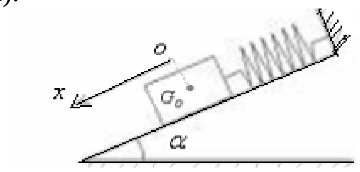
$\sin\varphi < 0$ donc $\varphi < 0$ d'où: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

L'équation horaire du mouvement est : $x = 3.10^{-2}.\cos(10.t - \frac{\pi}{2})$

4) La période propre du mouvement. : $T_o = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi.\sqrt{\frac{0,2}{20}} \approx 0,628\,s$

$2^{ème}$ Exercice : Pendule élastique incliné:-

Un pendule élastique est placé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^o$ par rapport au plan horizontal .Le pendule élastique est constitué d'un ressort maintenue par un support fixe à l'une de ses extrémités alors que l'autre extrémité est liée à un corps solide de masse de masse m=200g . (voir schéma).



Sachant que l'allongement du ressort à l'équilibre est : $\Delta\ell_o = 8cm$

1)Déterminer l'allongement de ressort à l'équilibre .

2) On écarte le corps de sa position d'équilibre de 2cm selon la ligne de la grande pente vers le bas et on le lâche sans vitesse initiale.

a- Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

b-Sachant que le corps passe à t=0 du point d'abscice x=+1cm dans le sens positif.

Déterminer l'équation horaire du mouvement. On donne : g=10N/kg

----

Réponse :

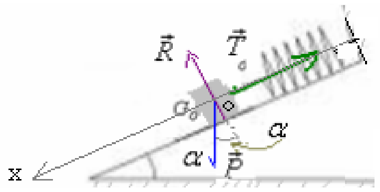
1) Système étudié {le corps solide à l'équilbre}

Bilan des forces:

$\vec{P}$: poids du cavalier.

$\vec{R}$: réaction du plan de contact elle est perpendiculaire au plan de contact car les frottements sont négligeables..

$\vec{T}_o$: Tension du ressort à l'équilibre



Condition d'équilibre: $\vec{P} + \vec{T}_o + \vec{R} = \vec{0}$

Par projection sur l'axe ox $P.\sin\alpha - T_o + 0 = 0 \Rightarrow m.g.\sin\alpha - k.\Delta\ell_o = 0$ donc : $\Delta\ell_o = \dfrac{m.g.\sin\alpha}{k}$

AN: $\Delta\ell_o = \dfrac{0{,}2.\sin 30 \times 10}{20} = 0{,}05m = 5cm$

....

2) Système étudié {le corps solide }

Bilan des forces:

$\vec{P}$: poids du cavalier.

$\vec{R}$: réaction du plan de contact elle est perpendiculaire au plan de contact car les frottements sont négligeables..

$\vec{T}$: tension du ressort lors du mouvement.

En appliquant la deuxième loi de Newton : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$

Par projection sur l'axe ox: $P - T + 0 = m.a_x \Rightarrow m.g - k.(\Delta\ell_o + x) = m.a_x \Rightarrow m.g - k.\Delta\ell_o - k.x = m.\ddot{x}$

et d'après la condition d'équilibre on a : $m.g.\sin\alpha - k.\Delta\ell_o = 0$ donc : $-k.x = m.\ddot{x}$ d'où: $\boxed{m.\ddot{x} + \dfrac{k}{m}.x = 0}$

....

3) la solution de cette équation différentielle est de la forme suivante : $\boxed{x = x_m.\cos(\omega_o.t + \varphi)}$ (1) avec :

$\omega_o = \sqrt{\dfrac{m}{K}} = \sqrt{\dfrac{0{,}2}{20}} = 10 rad/s$ et : $x_m = 2cm$

Pour déterminer la valeur de φ ,on utilise les conditions initiales : à t=0 on a x=1cm

En remplaçant dans (1) on a: $1 = 2.\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ d'où: $\varphi = \cos^{-1}\dfrac{1}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3}$

Or le corps passe à t=0 du point d'abscice x=+1cm dans le sens positif , donc sa vitesse v>0 à t=0.

Et on a : $v = \dot{x} = -x_m.\omega_o \sin(\omega_o.t + \varphi)$ et à t=o : $v = -x_m.\omega_o \sin\varphi > 0$ $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$ d' où : $\varphi < 0$ donc: $\sin\varphi < 0$

Equation horaire du mouvement: $\boxed{x = 2.10^{-2}.\cos(10.t - \dfrac{\pi}{3})}$