

Oscillations libres dans un dipole RLC en série.

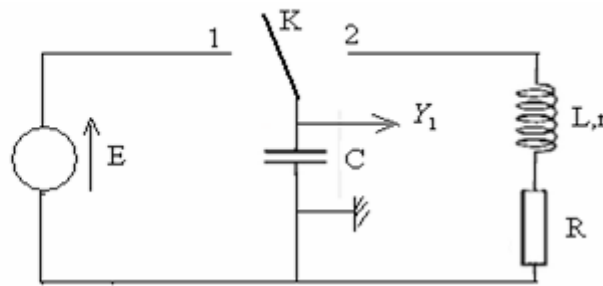
On commence au début de la leçon par rappeler l'expression de l'énergie électrique du condensateur et celle de l'énergie magnétique de bobine, puis (pour prévoir l'idée de décharge) on se pose la question: que se passera-t-il si on associe en série un condensateur chargé avec une bobine ?

I-Décharge d'un condensateur dans une bobine:

madariss.fr

1) Le montage expérimental :

On réalise le montage suivant :

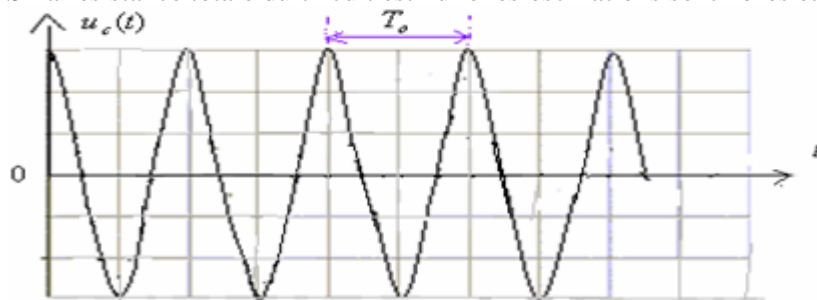


On place l'interrupteur K à la position (1) une durée suffisante pour que le condensateur soit chargé puis le bascule à la position 2 tout en visualisant à la voie y_1 sur l'écran d'un oscilloscope la tension aux bornes du condensateur. On obtient ainsi un circuit RLC en série dans lequel la charge emmagasinée dans le condensateur **oscille entre ses armatures** car le condensateur se décharge et se charge régulièrement mais grâce à l'existence de la résistance dans le circuit, la charge du condensateur diminue de même que la tension entre ses bornes : on dit que **les oscillations sont amorties**. Et comme le circuit RLC ne comporte pas de générateur : les **oscillations sont dites libres et amorties**. (l'amortissement est due au fait qu'une partie de l'énergie électrique se perd sous forme de chaleur au niveau de la résistance du circuit par effet Joule).

2) Les régimes d'amortissement :

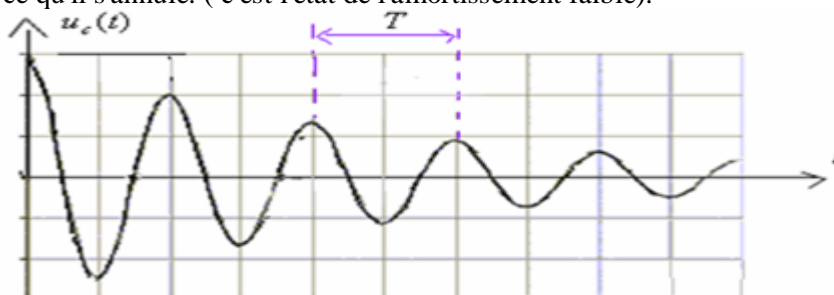
Selon la valeur de la résistance on distingue trois régimes:

■ **Le régime périodique** : Si la résistance totale du circuit est nulle les oscillations sont libres et non amorties



Le régime périodique est caractérisé par sa période propre T_0 .

■ **Le régime pseudopériodique**: Si la résistance totale du circuit est faible les oscillations sont libres et amorties et leur amplitude diminue jusqu'à ce qu'il s'annule. (c'est l'état de l'amortissement faible).



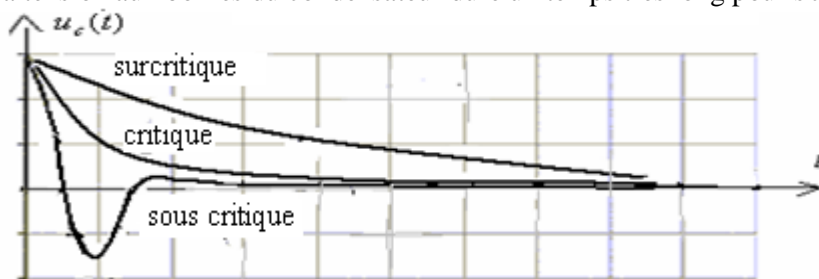
Le régime pseudopériodique est caractérisé par la pseudopériode T qui égale à la période propre $T=T_0$.

■ **Le régime aperiodique**: Si la résistance totale du circuit est grande, les oscillations disparaissent car l'amortissement est fort, le condensateur perd sa charge sans oscillations et on distingue dans ce cas trois régimes:

- **Le régime sous critique** : la tension aux bornes du condensateur effectue une seule oscillation avant de s'annuler.

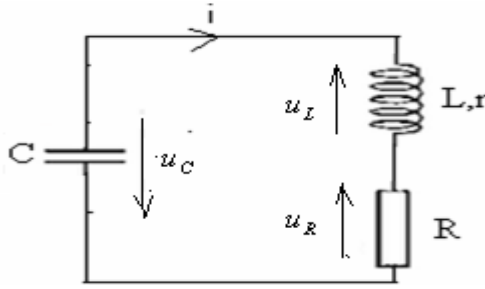
- **Le régime critique** : la tension aux bornes du condensateur s'annule sans oscillations.

- **Le régime surcritique** : la tension aux bornes du condensateur dure un temps très long pour s'annuler sans oscillations.



3) Equation différentielle d'un circuit RLC en série:

On considère le montage suivant dans lequel le condensateur est initialement chargé.



En appliquant la loi d'additivité des tensions on a: $u_R + u_L + u_C = 0 \Rightarrow R.i + r.i + L.\frac{di}{dt} + u_c = 0$ d'où:

$$L.\frac{di}{dt} + (R+r)i + u_c = 0 \quad \text{et on a : } i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_c)}{dt} = C.\frac{d(u_c)}{dt} \quad \text{et: } \frac{di}{dt} = C.\frac{d^2 u_c}{dt^2}$$

Donc: $L.C.\frac{d^2 u_c}{dt^2} + (R+r).C.\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$ et en divisant le tout par LC: $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R_t}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{L.C} u_c = 0$ avec: $R_t = R+r$

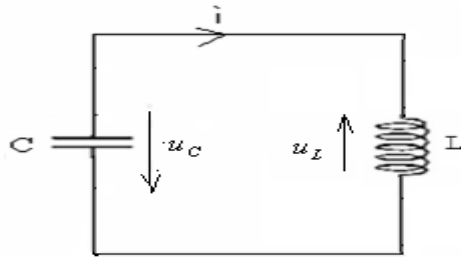
C'est l'équation différentielle que vérifie la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC en série.

Le terme: $\frac{R_t}{L} \cdot \frac{du_c}{dt}$ résulte de l'amortissement (par son annulation l'amortissement disparaît).

II-Les oscillations non amorties dans un circuit idéal LC :

1) Montage expérimental :

On considère le montage expérimental suivant constitué d'un condensateur de capacité C initialement chargé et d'une bobine idéale d'inductance L et de résistance nulle $r=0$. (ce qui est difficile de réaliser pratiquement car quelque soit la bobine, sa résistance est non nulle, donc c'est un circuit idéal).



2) Equation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions: $u_L + u_C = 0 \Rightarrow L.\frac{di}{dt} + u_c = 0$ $r=0$ avec: $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C.u_c)}{dt} = C.\frac{d(u_c)}{dt}$

$$\text{et : } \frac{di}{dt} = C.\frac{d^2 u_c}{dt^2} \quad \text{donc: } L.C.\frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c = 0 \quad \text{et en divisant le tout par LC : } \frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{L.C} u_c = 0$$

C'est l'équation différentielle que vérifie la tension aux bornes du condensateur dans un circuit idéal LC.

3) Solution de l'équation différentielle :

La solution de l'équation différentielle: $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{L.C} u_c = 0$ est une fonction sinusoïdale de la forme :

$$u_c(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2.\pi}{T_o} t + \varphi\right)$$

$u_c(t)$: tension aux bornes du condensateur. en (V)

U_m : amplitude des oscillations (c'est l'élongation maximale) en (V)

φ : la phase du mouvement à l'instant $t=0$. en (rad).

T_o : la période propre des oscillations en (s).

4) Expression de la période propre :

Or la solution de l'équation différentielle: $L.C.\frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c = 0$ est: $u_c(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2.\pi}{T_o} t + \varphi\right)$

Sa dérive: $\frac{du_c}{dt} = -U_m \cdot \frac{2.\pi}{T_o} \sin\left(\frac{2.\pi}{T_o} t + \varphi\right)$ et sa dérivée seconde est: $\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -\frac{4.\pi^2}{T_o^2} \cdot U_m \cdot \cos\left(\frac{2.\pi}{T_o} t + \varphi\right) = -\frac{4.\pi^2}{T_o^2} \cdot u_c$

En remplaçant dans l'équation différentielle $\Rightarrow -\frac{4.\pi^2}{T_o^2} \cdot u_c + \frac{1}{L.C} \cdot u_c = 0$ $\frac{1}{L.C} \cdot u_c = \frac{4.\pi^2}{T_o^2} \cdot u_c$ d'où: $T_o = 2.\pi \cdot \sqrt{L.C}$

5) Utilisation de l'équation de dimension pour déterminer l'unité de T_0 :

On a: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ donc: $[T_0] = ([L] \cdot [C])^{1/2}$

d'après la relation: $i = C \frac{du_c}{dt}$ on a: $[I] = [C] \frac{[U]}{[t]}$ d'où: $[C] = \frac{[I] \cdot [t]}{[U]}$

$u_L = L \frac{di}{dt}$ Et d'après la relation: on a: $[U] = [L] \frac{[I]}{[t]}$ d'où: $[L] = \frac{[U] \cdot [t]}{[I]}$

Donc: $[T_0] = ([L] \cdot [C])^{1/2} = \left[\frac{[U] \cdot [t]}{[I]} \times \frac{[I] \cdot [t]}{[U]} \right]^{1/2} = [t^2]^{1/2} = [t]$

6) Expression de l'intensité du courant et de la charge dans le circuit idéal LC:

L'expression de la charge du condensateur en fonction du temps est $q(t) = C u_c(t)$ avec: $u_c(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$

$q(t) = C U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ qu'on peut écrire: $q(t) = q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ avec: $q_m = C U_m$

L'expression de l'intensité du courant: $i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right) = q_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

car: $-\sin \alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

qu'on peut écrire: $i(t) = I_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ avec: $I_m = q_m \cdot \frac{2\pi}{T_0}$

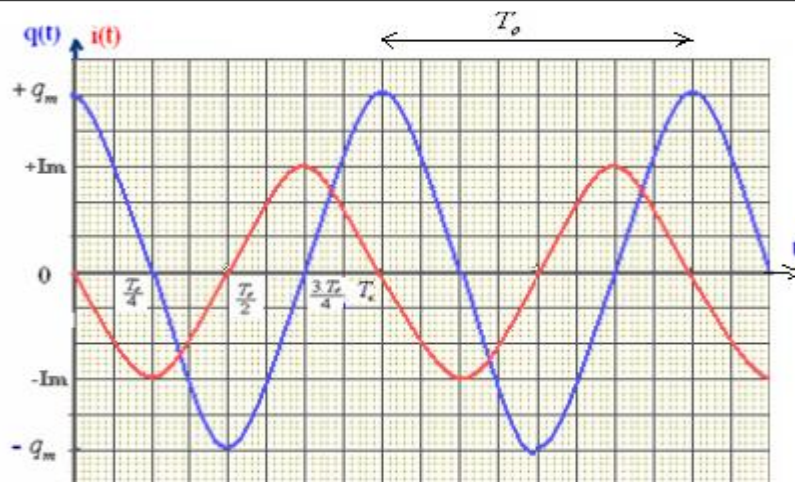
Pour déterminer la valeur de φ on utilise les conditions initiales qui sont: $u_c(t) = E$ à $t=0$,

donc en remplaçant dans: $u_c(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ elle devient $\cos(\varphi) = \frac{E}{E} = 1 \Rightarrow \varphi = 0$

donc: $q(t) = q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$ et: $i(t) = I_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \frac{\pi}{2}\right)$

$q(t)$ et: $i(t)$ sont en quadrature de phase. (lorsque l'une est maximale ou bien minimale l'autre s'annule.)

t	0	$\frac{T_0}{4}$	$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
$q(t) = q_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$	$+q_m$	0	$-q_m$	0	$+q_m$
$i(t) = I_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \frac{\pi}{2}\right)$	0	$-I_m$	0	$+I_m$	0



III- Transfert d'énergie entre la bobine et le condensateur:

1) Énergie du circuit LC :

a) Expression de l'énergie totale d'un circuit LC:

L'énergie totale d'un dipôle LC est la somme de l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur et de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine.

$$\xi_t = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \quad \text{Et on a : } \begin{cases} u(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) \\ q(t) = C u(t) = q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) \\ i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_m \cdot \frac{2\pi}{T_o} \sin\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) \end{cases}$$

donc

$$\xi_t = \frac{1}{2.C} q_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot q_m^2 \cdot \frac{4.\pi^2}{T_o^2} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) \quad \text{avec : } \boxed{T_o^2 = 4.\pi^2.LC}$$

donc

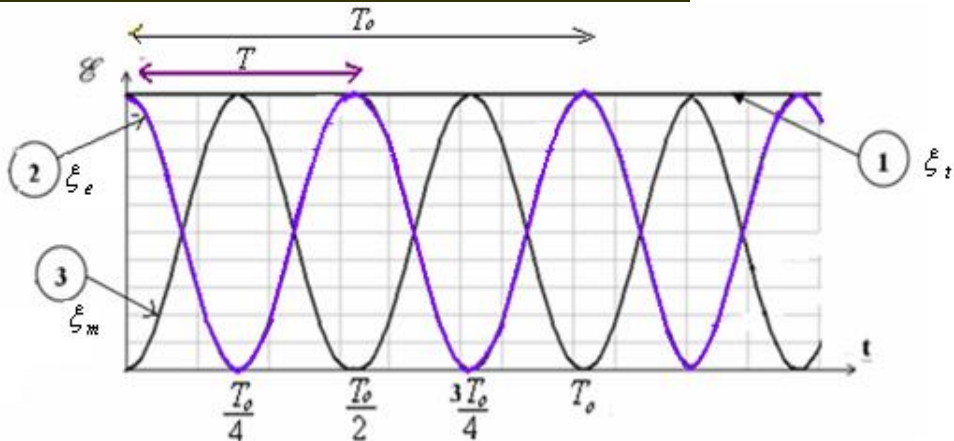
$$\begin{aligned} \xi_t &= \frac{1}{2.C} q_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot q_m^2 \cdot \frac{4.\pi^2}{4.\pi^2.L.C} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) \\ &= \frac{q_m^2}{2.C} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) + \frac{q_m^2}{2.C} \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) \\ &= \frac{q_m^2}{2.C} \left[\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_o} t + \varphi\right) \right] = \frac{q_m^2}{2.C} \end{aligned}$$

$$I_m = q_m \cdot \frac{2\pi}{T_o} \Rightarrow q_m = \frac{I_m \cdot T_o}{2\pi} \Rightarrow q_m^2 = \frac{I_m^2 \cdot T_o^2}{4.\pi^2} = \frac{I_m^2 \cdot 4.\pi^2 \cdot L.C}{4.\pi^2} = L.C I_m^2 \quad \text{donc :}$$

$$\xi_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_m^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2 = C^{te}$$

et on a : $q_m = C.E \Rightarrow \xi_t = \frac{1}{2} \cdot C.E^2$ donc: l'énergie totale du circuit LC est constante.

b) Courbes de variation des énergies d'un circuit idéal LC:



La période T de l'échange énergétique entre la bobine et le condensateur est égale à la moitié de la période propre T_o .

Au cours des oscillations non amorties, l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur se transforme en énergie magnétique emmagasinée dans la bobine et inversement.

c) Détermination de l'équation différentielle par étude énergétique:

L'énergie totale d'un dipôle LC est constante $\xi_t = C^{te}$ donc: $\frac{d\xi_t}{dt} = 0$ avec : $\xi_t = \xi_e + \xi_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot Li^2$

$$\text{Donc : } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot Li^2 \right) = 0 \quad \text{d'où : } \frac{1}{2.C} \cdot \frac{d(q^2)}{dt} + \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{d(i^2)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} \cdot \left(\cancel{2} q \frac{dq}{dt} \right) + \frac{1}{C} \cdot L \cdot \left(\cancel{2} i \frac{di}{dt} \right) = 0$$

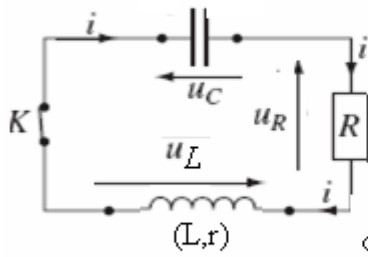
$$\Rightarrow \frac{1}{C} \cdot q \frac{dq}{dt} + L \cdot i \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow u_c \cdot i + L \cdot i \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{donc : } i \cdot \left(u_c + L \cdot \frac{di}{dt} \right) = 0 \Rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + u_c = 0$$

$$\text{et : } i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot u_c)}{dt} = C \cdot \frac{d(u_c)}{dt} \quad \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} \quad \text{donc : } \boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{L.C} u_c = 0}$$

C'est l'équation différentielle que vérifie la tension aux bornes du condensateur dans un circuit idéal LC.

2) Énergie du circuit RLC en série:

L'énergie totale d'un dipôle RLC est : $\xi_t = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{c}$



En appliquant la loi d'additivité des tensions on a : $u_R + u_L + u_C = 0$

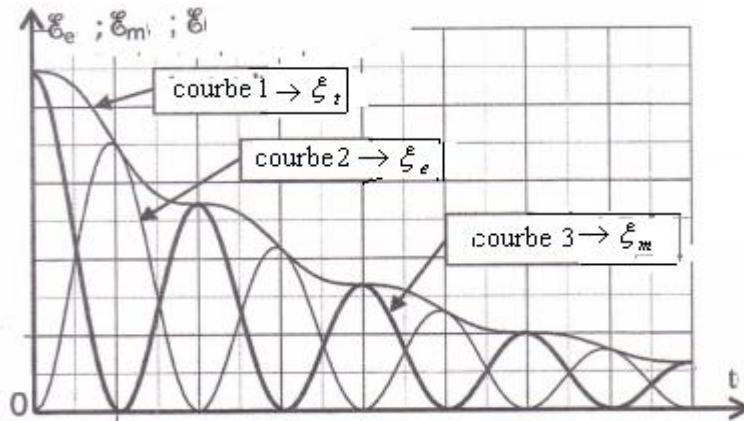
$$\Rightarrow Ri + ri + L \frac{di}{dt} + u_c = 0 \quad \text{d'où:} \quad L \frac{di}{dt} + R_t i + u_c = 0 \quad \text{d'où:}$$

$$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + u_c = -R_t i \quad \text{d'où:} \quad \boxed{L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = -R_t i} \quad (1)$$

d'autre part on a : $\frac{d\xi_t}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{c} \frac{dq}{dt} = i \cdot \left[L \frac{di}{dt} + \frac{q}{c} \right] = i \cdot \left[-R_t i \right] = -R_t i^2$

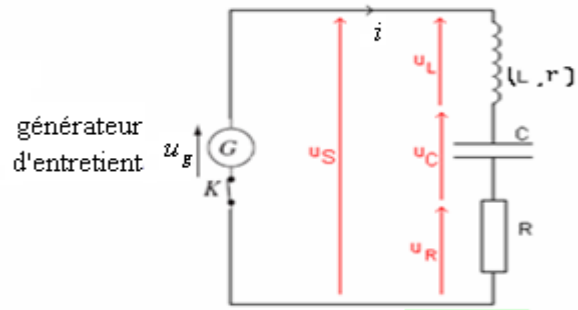
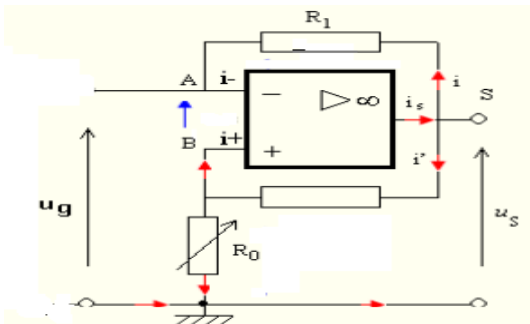
$\frac{d\xi_t}{dt} = -R_t i^2 < 0$ donc l'énergie totale du circuit RLC est décroissante.

L'énergie totale du circuit RLC décroît en fonction du temps et les oscillations sont amorties à cause de la perte de l'énergie électrique par effet joule au niveau de la résistance.



IV- Entretien des oscillations :

Pour entretenir les oscillations on doit utiliser un générateur d'entretien pour récompenser l'énergie perdue par effet Joule à chaque oscillation.



La tension aux bornes du générateur d'entretien est proportionnelle à l'intensité du courant $u_g = R_o \cdot i$ avec : $R_o = R + r$

Ce générateur se comporte comme une résistance négative.

En appliquant la loi d'additivité des tensions on a : $u_g = u_R + u_c + u_L$

$$\text{d'où:} \quad (R + r)i = R \cdot i + u_c + r \cdot i + L \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad L \frac{di}{dt} + u_c = 0 \quad (1)$$

et on a : $i = \frac{dq}{dt} = c \frac{du_c}{dt}$ et : $\frac{di}{dt} = c \frac{d^2 u_c}{dt^2}$ donc la relation(1) devient : $Lc \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c = 0$

C'est l'équation différentielle que vérifie la tension aux bornes du condensateur dans un circuit idéal LC. donc les oscillations sont entretenues et l'amplitude devient constante.

$$T = T_o$$

$$T_o = 2\pi\sqrt{LC}$$

